Introdução ao estudo de Circuitos Lineares, Invariantes, Dinâmicos e de Parâmetros Concentrados usando o

Modelo de Estado

Análise de Circuitos

Teoria dos Circuitos

por

António Joaquim Serralheiro

Setembro de 1998

1. O MODELO DE ESTADO

1.1 INTRODUÇÃO

Na sequência da análise do comportamento temporal de grandezas de interesse em circuitos eléctricos lineares, iremos abordar o estudo de circuitos comportando elementos dinâmicos, nomeadamente o condensador, o indutor e o transformador que consideraremos como dispositivos lineares. Em geral, o estudos de circuitos envolvendo estes elementos contempla quer o domínio do tempo quer o da frequência. Se o estudo no domínio do tempo tem, geralmente, como objectivo o comportamento transitório, já o estudo na frequência tem como finalidade o comportamento em regime permanente; atempadamente iremos ver que não tem de ser forçosamente assim.

O estudo de circuitos dinâmicos será de seguida efectuado recorrendo ao modelo de estado que, entre outras vantagens, permite uma análise mais sistematizada do seu comportamento e, como tal, presta-se ao tratamento numérico em computador digital.

Designa-se por modelo de estado um conjunto de equações diferenciais lineares e de coeficientes constantes que relacionam as variáveis de estado com as fontes independentes. O modelo de estado apresenta, então, no caso univariável, a seguinte forma:

Eq.1: $$\boxed{\frac{d\,x(t)}{dt} = a\,x(t) + b\,u(t)}$$

em que $x(t)$ representa a variável de estado e $u(t)$ o termo correspondente à fonte independente[1].

É comum, na maior parte das situações, incluir no modelo de estado uma equação adicional – a equação de saída – e que se destina a relacionar a variável em estudo $y(t)$ (corrente ou tensão eléctricas) com a variável de estado e com a fonte independente. Esta equação, que não é mais do que a expressão de uma combinação linear na variável de estado e na fonte independente, toma a forma:

Eq.2: $$\boxed{y(t) = c\,x(t) + d\,u(t)}$$

[1] Para facilidade de expressão, utilizaremos «fonte independente» para designar o termo das variáveis independentes que, nos circuitos em estudo, corresponde às fontes ou geradores de sinal (tensão ou corrente) independentes.

em que, como anteriormente, x e u representam a variável de estado e a fonte independente, respectivamente. Recorde-se que, tanto a equação 1 como a equação 2, se reportam à existência de uma única variável de estado, $x(t)$.

Quando existam mais do que uma variável de estado, $x(t)$ passa a designar o vector de estado, cujos elementos serão as k-variáveis de estado do circuito:

Eq.3: $$x(t) = [x_1(t);\ x_2(t);\ x_3(t);\ ....;\ x_n(t)]^T = [x_k(t)]^T : k = 1, 2, ..., n$$

Assim, poderemos agora definir variável de estado como sendo um conjunto mínimo de variáveis (sendo, portanto, as variáveis de estado linearmente independentes) que permita a determinação do estado do circuito.

Nestes termos, a equação de estado assumirá a forma (caso multivariável):

Eq.4: $$\boxed{\frac{d\,x(t)}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t)}$$

em que, como na equação 3, $x(t)$ é o vector de estado; A é uma matriz de n^2 elementos denominada matriz da dinâmica; B é uma matriz de nm elementos denominada matriz de controlo e $u(t)$ um vector m-dimensional representando as diversas fontes independentes existentes no circuito, pelo que $u(t) = [u_1(t);\ u_2(t);\ u_3(t);\ ....;\ u_m(t)]^T$. A equação de saída será agora (independentemente de $y(t)$ representar a variável de saída ou um vector cujos elementos são variáveis de saída):

Eq.5: $$\boxed{y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)}$$

em que, como na equação 4, $x(t)$ e $u(t)$ representam os vectores de estado e das fontes independentes. C e D são matrizes e/ou vectores conforme y e u são vectores e/ou escalares, respectivamente.

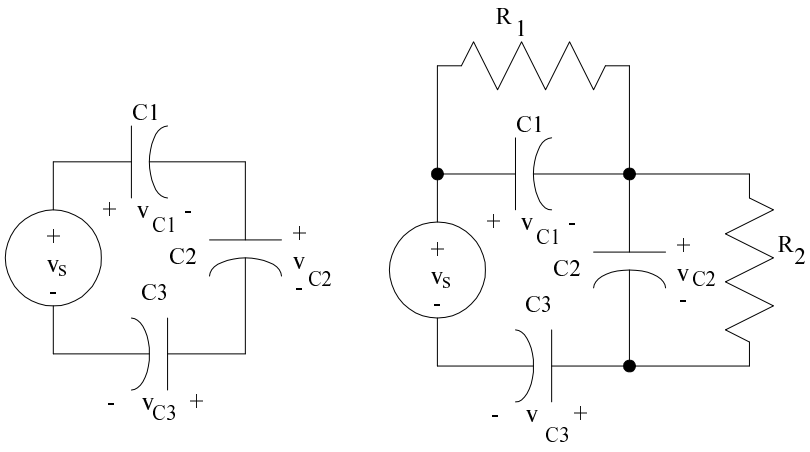
1.2 VARIÁVEIS DE ESTADO E EQUAÇÃO DE ESTADO

Como é sabido, a tensão e a corrente eléctricas no condensador e no indutor encontram-se relacionadas através de $i_C(t) = C\,\frac{d\,v_C(t)}{dt}$ e de $v_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt}$, respectivamente. Ao invés das resistências, estes elementos têm a particularidade de apresentarem, quer na corrente quer na tensão, uma dependência temporal. Poderemos dizer que estes elementos apresentam «memória». Assim, se, por exemplo, elegermos a tensão aos terminais do condensador e a corrente que percorre o indutor como variáveis de interesse, estaremos a utilizar as «memórias» do circuito para caracterizar o seu comportamento. Ao conhecimento das «memórias» num dado instante de tempo daremos a designação de estado. Consequentemente, às variáveis que permitem determinar ou conhecer o «estado» do circuito, daremos o nome de variáveis de estado. Portanto, por variáveis de

estado designaremos um conjunto mínimo de variáveis que permitam, para qualquer instante de tempo, a determinação do estado do circuito. Desta definição resulta, forçosamente, que as variáveis de estado são variáveis linearmente independentes. Note-se ainda que nem só as tensões nos condensadores e/ou as correntes nos indutores são elegíveis para variáveis de estado. Quaisquer outras grandezas no circuito, i. e. tensões ou correntes, poderão, desde que verifiquem a independência linear, ser variáveis de estado.

Torna-se, pois, necessário determinar quantas (e quais) deverão ser as variáveis de estado e para tal, classificaremos os circuitos com elementos dinâmicos em duas classes distintas:

- Circuitos Tipo A, definidos por não apresentarem caminhos fechados (*loops*) de condensadores e/ou fontes de tensão e/ou não apresentarem conjuntos de corte de indutores e/ou fontes de corrente;
- Circuitos Tipo B, definidos como sendo todos aqueles que não pertencem à classe anterior.



a) b)

Figura 1: a) Circuito Tipo B; b) Circuito Tipo B.

Vejamos agora em que consiste a diferença nas duas classes de circuitos e ainda como, em cada caso, determinar o número de variáveis de estado.

Para tal, considere-se a figura 1a) onde se representa um circuito dinâmico em que existe um caminho fechado (assinalado pelo tracejado) de uma fonte de tensão (independente) e três condensadores. Neste caso, a lei de Kirchhoff das tensões estabelece que

Eq.6: $$v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} - v_s = 0$$

Desta equação se verifica que as tensões aos terminais dos condensadores não podem, em simultâneo, ser variáveis de estado, uma vez que se trata de uma dependência linear em v_{c1}, v_{c2}, v_{c3} e v_s. Portanto, se elegermos v_{c1} e v_{c2} como variáveis de estado, v_{c3} determina-se

imediatamente a partir da equação 6 e assim sucessivamente. Concluímos então que, neste caso, o número de variáveis de estado (= 2) se tornou igual ao número de componentes dinâmicos (= 3) do circuito subtraído do número de dependências lineares (= 1). Atente-se agora na figura 1b) que deriva da figura 1a) pela inclusão de mais dois elementos, as resistências *R1* e *R2*. O circuito apresenta agora duas malhas extra, mas repare-se que a equação 6 se mantém válida, pelo que a análise anterior se verifica. Ou seja, do ponto de vista das variáveis de estado (e do seu comportamento) não houve qualquer modificação, mesmo tratando-se de dois circuitos distintos.

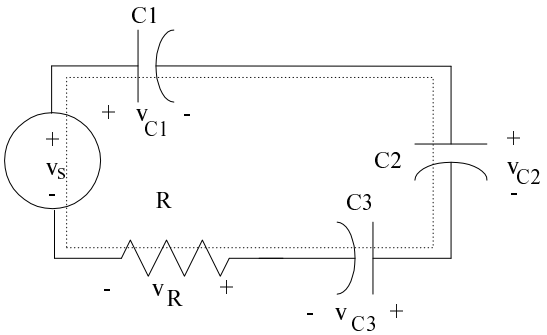


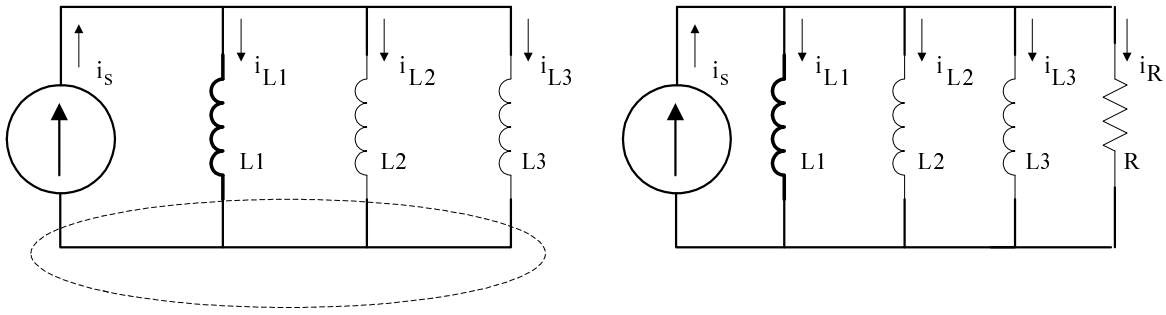
Figura 2: Circuito do Tipo A

Situação distinta ocorre agora no circuito da figura 2 que poderá derivar do circuito anterior, figura 1a), pela inclusão de um ramo adicional – a resistência *R*, uma vez que a lei de Kirchhoff das tensões assume agora

Eq.7: $$v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} + v_R - v_s = 0$$

Ou seja, já não se poderá afirmar que através de v_{c1}, v_{c2} e v_s se determinará v_{c3}, uma vez que resta obter v_R o que, por exemplo, poderá ser efectuado através de i_{c1}. No entanto, como se verifica facilmente, o circuito da figura 2 já não apresenta um caminho fechado onde apenas existam fontes de tensão e/ou condensadores. Assim, enquanto nos circuitos da figura 1 se tem que o número de variáveis de estado é inferior ao número de elementos dinâmicos, já no circuito da figura 2 o número de variáveis de estado é igual ao número de elementos dinâmicos.

Atente-se agora no circuito da figura 3a, onde se representa um circuito que inclui indutores e onde se pode situar um conjunto de corte abrangendo apenas a fonte de corrente e indutores:



a) b)

Figura 3: a) Circuito Tipo B; b) Circuito Tipo A.

Como se pode facilmente ver, encontramo-nos numa situação similar à descrita na equação 6. De facto, teremos agora que o somatório das correntes interseptadas pela superfície assinalada na figura 3a se pode escrever como:

Eq.8: $$i_s - i_{L1} - i_{L2} - i_{L3} = 0$$

Novamente se enfrenta a situação em que i_{L1}, i_{L2} e i_{L3} não podem ser em simultâneo variáveis de estado, uma vez que são linearmente dependentes (equação 8). Esta dependência é quebrada pela introdução de um ramo adicional apresentando quer uma resistência quer uma fonte de tensão, como se representa na figura 3b.

Resumindo, sempre que não haja dependência linear das «variáveis de estado» (circuitos do Tipo A) se pode afirmar que o número de componentes do vector de estado é igual ao número de componentes dinâmicos do circuito. No caso contrário, nos circuitos do Tipo B, o número de variáveis de estado vem igual ao número de componentes dinâmicos subtraído do número de dependências lineares.

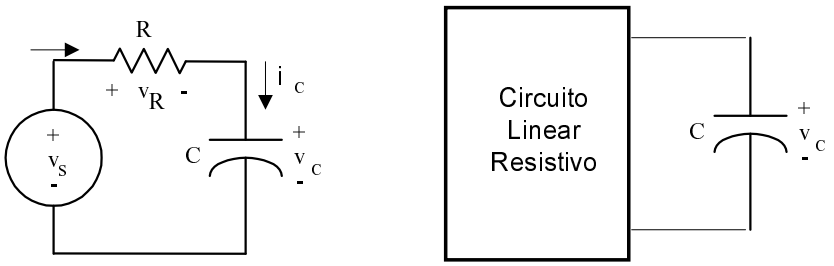
1.3 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO

1.3.1 CASO UNIVARIÁVEL

Situemo-nos, por ora, em circuitos do Tipo A que, como já se sabe, não apresentam caminhos fechados de condensadores e/ou fontes de tensão e/ou fontes de corrente e/ou inductâncias. Nesta situação, o número de variáveis de estado vem igual ao número de elementos dinâmicos. Uma vez que a equação de estado assume a forma genérica apresentada na equação 1, poderemos fazer a seguinte interpretação:

- trata-se de uma igualdade entre a derivada da variável de estado com uma combinação linear da própria variável de estado com o termo correspondente à fonte independente, e ainda,
- a derivada da variável de estado é, caso se trate de um condensador, a corrente que o percorre (dividida pela sua capacidade), e a equação de estado assume a forma de uma igualdade entre esta corrente e a soma ponderada da tensão aos seus terminais com a fonte independente; ou
- a derivada da variável de estado é, caso se trate de um indutor, a tensão aos seus terminais (dividida pela sua indutância), e a equação de estado assume a forma de uma igualdade entre esta tensão e a soma ponderada da corrente que percorre o indutor e a fonte independente.

Por uma questão de facilidade de exposição, suponha-se que existe um único elemento dinâmico, um condensador, no circuito da figura 4a), formando uma malha com uma fonte independente de tensão e uma resistência. Este circuito, longe de se tratar de um caso particular é, na verdade, uma representação equivalente de qualquer circuito linear resistivo ligado aos terminais de um condensador – circuito equivalente de Thévenin, figura 4b).



a) b)

Figura 4 – Circuito R-C passa-baixo (1ª ordem).

Assuma-se que a variável de estado do circuito da figura 4a) é v_C; pelos motivos acima apresentados, deveremos pois procurar explicitar a corrente no condensador i_C numa combinação linear de v_C e da fonte independente v_S . Isto é, consideremos na equação 1, $v_C(t) = x(t)$ e $v_S(t) = u(t)$. Deste modo, teremos que o lado esquerdo da equação 1 será dado por $\frac{d\,x(t)}{dt} = \frac{i_C}{C}$. O lado direito daquela equação virá então dado por $a\ v_C + b\ v_S$, sendo a e b os pesos da combinação linear.

Observando a figura 4a) e notando que a corrente na resistência é igual a i_C então teremos

Eq.9: $$i_C = (v_S - v_S) / R = G(v_S - v_S)$$

Daqui se retira que a equação de estado virá dada pela equação seguinte, uma vez que da característica tensão-corrente do condensador se tem $i_C = C \frac{d\,v_C(t)}{dt}$:

Eq.10: $$\frac{d\,v_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} v_C(t) + \frac{1}{RC} v_S(t)$$

A equação 10 é denominada equação de estado do circuito na forma canónica.

Consideremos agora o circuito da figura 5 que contém um indutor ligado aos terminais de uma fonte independente de corrente em paralelo com uma resistência. Novamente se pode considerar o gerador independente em paralelo com a resistência, como sendo o circuito equivalente de Norton de um qualquer circuito linear resistivo com fontes independentes, pelo que o não haverá perda de generalidade na exposição que a seguir se apresenta.

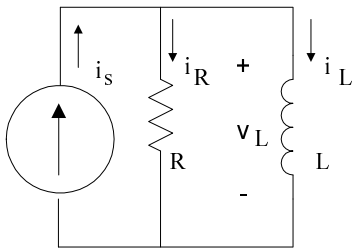


Figura 5 – Circuito R-L passa baixo (1ª ordem).

Neste caso, comecemos por reparar que a diferença de potencial aos terminais do indutor é idêntica à diferença de potencial aos terminais da resistência, pelo que teremos a seguinte equação:

Eq.11: $$v_L = v_R = R\,(i_s - i_L)$$

Recordando que $v_L = L\,\frac{d\,i_L}{dt}$, imediatamente se obtém a equação de estado (na forma canónica) para o circuito R-L da figura 5:

Eq.12: $$\frac{d\,i_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}\,i_L(t) + \frac{R}{L}\,i_s(t)$$

Resumindo, poderemos então verificar que o processo de obtenção da equação de estado, em circuitos do tipo A com um único elemento dinâmico, passa por:

- escolha da variável de estado adequada, ou seja:
  - v_c quando o elemento dinâmico for um condensador;
  - i_L quando o elemento dinâmico for uma bobina.
- explicitação da combinação linear da variável de estado e da(s) fonte(s) independente(s) na:
  - i_c quando o elemento dinâmico for um condensador;
  - v_L quando o elemento dinâmico for um indutor

1.3.2 CASO MULTIVARIÁVEL

Atente-se na figura 6 onde se representa um circuito contendo dois elementos dinâmicos: um condensador e uma bobina. À semelhança do processo seguido para os circuitos do Tipo A de 1ª ordem (existência de um elemento dinâmico), procuremos expressar a corrente no condensador como uma combinação linear da(s) variável(eis) de estado e da fonte independente e ainda a diferença de potencial aos terminais da bobina numa outra combinação linear da(s) variável(eis) de estado e da fonte independente. Assim teremos que a corrente i_c, por aplicação da lei de Kirchhoff de equilíbrio das correntes ao nó A será dada por $i_c = \frac{v_R}{R} - i_L$ e, por sua vez, por

aplicação da lei de Kirchhoff de equilíbrio das tensões na malha da esquerda, $v_R = v_s - v_c$. Conjugando estas duas equações, e reordenando os termos teremos a equação seguinte:

Eq.13: $$i_c = -\frac{v_c}{R} - i_L + \frac{v_s}{R}$$

Recordando a característica tensão-corrente do condensador, imediatamente se obtém:

Eq.14: $$\frac{d\,v_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}\,v_c(t) - \frac{1}{C}\,i_L(t) + \frac{1}{RC}\,v_s(t)$$

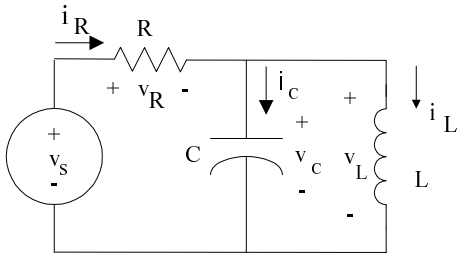


Figura 6 – Circuito RLC de 2ª ordem (Tipo A).

Procedendo ipsis verbis para o outro elemento dinâmico, teremos $v_L = v_c$. Note-se novamente a preocupação de colocar no lado direito desta última equação e também da equação 13 apenas variáveis de estado e fonte(s) indepentente(s). Usando a característica tensão-corrente da bobina, ficaremos com:

Eq.15: $$\frac{d\,i_L(t)}{dt} = \frac{1}{L}\,v_c(t)$$

Agrupando as equações 14 e 15 poderemos obter, usando uma notação matricial, a equação seguinte:

Eq.16: $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} v_s(t)$$

tendo-se usando a seguinte notação: $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\,v_c(t)}{dt} \\ \frac{d\,i_L(t)}{dt} \end{bmatrix}$.

Por comparação das equações 16 e 4 poderemos observar as seguintes igualdades:

- vector de estado $x(t) = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$

- matriz da dinâmica: $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$

- vector[2] de controlo: $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Considerando que a saída do circuito corresponde à tensão v_C, a equação de saída assumirá a forma indicada na equação 17:

Eq.17: $$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + 0\, v_S(t)$$

1.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO

1.4.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO. SOLUÇÃO POR INTEGRAÇÃO DIRECTA, CASO UNIVARIÁVEL.

Como é do conhecimento das Análises Matemáticas, uma equação diferencial linear de coeficientes constantes, submetida a uma condição fronteira, apresenta uma solução, solução esta que é única.

Na maioria das situações de interesse prático, interessa determinar o comportamento do circuito a partir do instante em que o mesmo é «ligado»[3]. Este instante será considerado, por ora, o instante $t = 0$. Procuremos então a solução para $t > 0$ da equação de estado que caracteriza o circuito. Convém relembrar que a variável de estado deverá ser contínua em t por forma a garantir uma derivada finita. Seja, então, x_0 a condição fronteira que a solução $x(t)$ da equação de estado $\frac{dx(t)}{dt} = a\,x(t) + b\,u(t)$ tem de verificar em $t = 0$.

Reescreva-se a equação 1 : $\frac{dx(t)}{dt} - a\,x(t) = b\,u(t)$ e multipliquemos ambos os membros por exp(-at):

Eq.18: $$\frac{dx(t)}{dt} e^{-at} - a\,x(t)\, e^{-at} = b\,u(t)\, e^{-at}$$

---

[2] Uma vez que o circuito apenas contém um gerador independente, B é um vector, se bem que no caso geral se trate de uma matriz.

[3] Ou seja, a partir do instante em que os geradores de sinal (tensão ou corrente) são activados.

Repare-se que o lado esquerdo da igualdade corresponde efectivamente à derivada temporal de $x(t)\ e^{-at}$, isto é: $\frac{d\,x(t)\ e^{-at}}{dt} = b\ u(t)\ e^{-at}$.

Integre-se a equação anterior desde 0 (instante inicial) até ao instante de tempo actual t:

$\int_0^t \frac{d\,x(\tau)\ e^{-a\tau}}{d\tau} d\tau = b \int_0^t u(\tau)\ e^{-a\tau}\ d\tau$. Daqui resulta $x(t)\ e^{-at} - x(0) = b \int_0^t u(\tau)\ e^{-a\tau}\ d\tau$, pelo que teremos finalmente na equação seguinte:

Eq.19:

$$\boxed{x(t) = x(0)\ e^{at} + b\ e^{at} \int_0^t u(\tau)\ e^{-a\tau}\ d\tau}$$

a solução $x(t)$ da equação de estado e que «passa» no ponto $x_0 = x(0)$ em $t = 0$.

Se bem que a equação 19 nos permita obter $x(t)$, o seu interesse prático é reduzido uma vez que, para os geradores de tensão/corrente de uso corrente, se pode utilizar um método expedito baseado nas soluções homogénea e particular para fontes exponenciais complexas. A título exemplificativo, suponha-se que $u(t) = e^{st}$ para $t > 0$. A variável s é, no caso geral uma variável complexa ($s \in \mathbb{C}$), isto é, $s = \sigma + j\ \omega$, sendo $\sigma,\ \omega \in \mathbb{R}$. Logo, substituindo $u(t)$ equação 19, e por manipulação elementar, teremos

Eq.20:

$$\boxed{x(t) = [x(0) - \frac{b}{s-a}]\ e^{at} + \frac{b}{s-a}\ e^{st}}$$

Este resultado pode ser obtido, como veremos nos parágrafos seguintes, através de um método expedito que será também utilizado para o caso multivariável. Este método baseia-se na determinação das soluções homogéneas e particular. De facto, a solução da equação de estado (equação 20) pode ser decomposta nas suas componentes homogénea e particular:

Eq.21:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

1.4.2 SOLUÇÃO HOMOGÉNEA

Considere-se a equação de estado homogénea para o caso univariável, obtida a partir da equação de estado na forma canónica por anulamento do termo independente:

Eq.22:

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = a\,x(t)$$

e designemos por $x_h(t)$ a sua solução homogénea. Assuma-se que $\boxed{x_h(t) = k\, e^{\lambda t}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, verifica a equação 22, pelo que substituindo $x(t)$ por $x_h(t)$, teremos $k\lambda\, e^{\lambda t} = k\, a\, e^{\lambda t}$. Uma vez que não estamos interessados na solução trivial ($k = 0$), poderemos concluir que $\boxed{\lambda = a}$. Assim, a solução homogénea é:

Eq.23: $$\boxed{x_h(t) = k\, e^{at}}$$

sendo k uma constante a determinar posteriormente.

A constante λ denomina-se frequência natural e, ao seu inverso, $\boxed{\frac{1}{\lambda} = \tau}$, constante de tempo do circuito e, como veremos, desempenha um papel fundamental na resposta do circuito.

No caso multivariável, a equação homogénea assumirá a forma da equação 24, em que $x(t)$ é agora o vector de estado e A a matriz da dinâmica:

Eq.24: $$\frac{d\,x(t)}{dt} = A\,x(t)$$

Assuma-se que $x_h(t) = K\, e^{\lambda t}$ é (uma) solução da equação homogénea, tal como já efectuámos no caso univariável. Claro que K não será agora uma constante, mas antes um vector $K = [k_1, k_2, \ldots, k_n]^T$. Assim sendo, $x_h(t)$ terá que satisfazer a equação 24, pelo que teremos,

Eq.25: $$\lambda K e^{\lambda t} = A K e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ . \\ . \\ . \\ k_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ . \\ . \\ . \\ k_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = 0$$

Designando I a matriz identidade, é sabido que $K\,I = K$ pelo que a equação 25 tomará agora a forma:

Eq.26: $$\boxed{[\lambda I - A]\, K e^{\lambda t} = 0}$$

Este é um problema bem conhecido em Álgebra Linear que tem solução não-nula no vector K sse o determinante da matriz $[\lambda I - A]$ for nulo, isto é:

Eq.27: $$\boxed{det\,[\lambda I - A] = 0}$$

A equação 27 é denominada equação característica e da sua resolução se obtêm os valores próprios da matriz A: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ que, por facilidade de exposição, admitimos serem todos distintos, i.e. a solução da equação 27 não tem raízes múltiplas, logo $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i, j = 1, 2, ..., n$.

Uma vez determinados os valores próprios da matriz A, da equação 26 se determinam os respectivos vectores próprios $K^{(i)}$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Seja, então, $x_h(t) = K e^{\lambda t}$, para $\lambda = \lambda_i$, $\forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$ uma solução da equação 24 e que designaremos por $x_h^{(i)}(t)$ uma vez que diz respeito ao valor próprio λ_i. Uma combinação linear das n-soluções homogéneas da equação de estado homogénea (equação 24) é também solução da mesma equação homogénea.

Finalmente, a solução homogénea da equação de estado será, caso todas os valores próprios de A sejam distintos,

Eq.28:
$$x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} x_h^{(i)}(t) \Rightarrow \boxed{x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} K^{(i)} e^{\lambda_i t}}$$

É sabido que os vectores próprios $K^{(i)}$ associados aos respectivos valores próprios λ_i só serão completamente determinados uma vez obtida a solução particular e impostas as condições iniciais. Esta questão será, oportunamente, exemplificada.

1.4.3 SOLUÇÃO PARTICULAR

A determinação da solução particular fica facilitada se pudermos utilizar exponenciais complexas nos termos independentes, isto é: $\boxed{u(t) = U e^{st}}$. A constante U representa a amplitude da fonte (eventualmente $U \in \mathbb{C}$, e neste caso teremos que a solução $x(t) \notin \mathbb{R}$ para ser antes $x(t) \in \mathbb{C}$) e s a frequência complexa do gerador, $\boxed{s = \sigma + j\,\omega}$. Deste modo, $u(t) = Ue^{\sigma t} e^{j\omega t}$ ou, ainda, $u(t) = Ue^{\sigma t} [cos(\omega t) + j\, sen(\omega t)]$.

Suponha-se que, no caso univariável, a solução particular para a variável de estado $x(t)$ é, à semelhança do efectuado para a solução homogénea, $\boxed{x_p(t) = X e^{st}}$. Então, forçando $x_p(t)$ na equação de estado (equação 1), teremos

Eq.29:
$$s\,X e^{st} = a\,X e^{st} + b\,U e^{st} \Rightarrow s\,X e^{st} - a\,X e^{st} = b\,U e^{st}$$

Donde resulta que a amplitude X da solução particular $x_p(t)$ é

Eq.30: $\boxed{X = (s - a)^{-1}\, b\, U}$

e, finalmente,

Eq.31: $x_p(t) = X e^{st} \Rightarrow \boxed{x_p(t) = (s - a)^{-1}\, b\, U e^{st}}$

A solução particular é, analisando a equação 31, a própria entrada (factor $U e^{st}$) multiplicada pelo factor $(s - a)^{-1} b$ que, sendo um complexo, a vai modificar em amplitude e fase através, respectivamente, do seu módulo $|(s - a)^{-1} b|$ e do seu argumento $\angle\{(s - a)^{-1} b\}$, em que $\angle\{z\}$ indica o argumento do complexo z, isto é, $\angle\{z\} = arctg \frac{Im\{z\}}{Re\{z\}}$.

Recordando que a saída do circuito é $y(t) = c\, x(t) + d\, u(t)$ (equação 2), poderemos verificar que, considerando apenas a solução particular[4] da equação de estado para a entrada $u(t) = U e^{st}$, se tem

Eq.32: $\boxed{y(t) = [\, c\, (s - a)^{-1} b + d]\, U e^{st}} \Rightarrow y(t) = Y\, e^{st}$

Resumindo, o quociente entre a amplitude da saída Y e a da excitação U representa uma <u>função de transferência</u> $G(s)$ que é, precisamente o factor $c(s - a)^{-1} b + d$:

Eq.33: $\boxed{G(s) = \frac{Y}{U} = c\, (s - a)^{-1} b + d}$

e que permite determinar de um modo expedito a saída do circuito, conhecida a sua entrada.

O conceito de função de transferência pode ser visualizado mais facilmente através da figura 7:

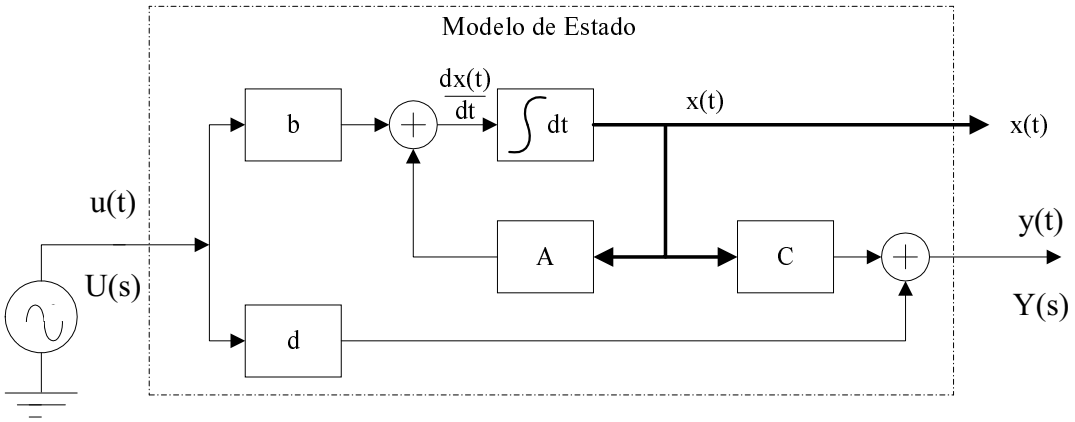


Figura 7 – Diagrama de Blocos ilustrando o conceito de Função de Transferência

[4] trata-se, neste caso, de ignorar o denominado regime natural (solução homogénea).

No caso multivariável teremos um procedimento análogo, isto é, sendo a entrada $u(t) = U e^{st}$, sabemos agora que a solução particular para o vector de estado $x(t)$ é $\boxed{x_p(t) = X e^{st}}$ em que X é um vector de n-elementos $X = [X_1, X_2, ..., X_n]^T$. Forçando $x_p(t)$ na equação de estado (equação 4), teremos:

Eq.34: $$s X e^{st} = A X e^{st} + B U e^{st} \Rightarrow s X e^{st} - A X e^{st} = B U e^{st} \Rightarrow s I X e^{st} - A X e^{st} = B U e^{st}$$

pelo que a amplitude X da solução particular é:

Eq.35: $$\boxed{X = (sI - A)^{-1} BU}$$

E, finalmente, a solução particular vem agora,

Eq.36: $$x_p(t) = X e^{st} \Rightarrow \boxed{x_p(t) = (sI - A)^{-1} B U e^{st}}$$

A interpretação deste resultado é, em tudo, similar à apresentada para o caso univariável, pelo que não será aqui repetida. Para terminar, a(s) saída(s) do circuito é(são) obtida(s) a partir da equação 5 e da equação 36, tendo-se o resultado seguinte:

Eq.37: $$\boxed{y(t) = [C (sI - A)^{-1} B + D] U e^{st}} \Rightarrow y(t) = Y e^{st}$$

Tratando-se de um circuito com uma saída única e com uma única entrada, a função de transferência é dada por

Eq.38: $$\boxed{G(s) = \frac{Y}{U} = C (sI - A)^{-1} B + D}$$

1.4.4 EXCITAÇÃO EXPONENCIAL COMPLEXA

Como se acabou de verificar, a utilização de excitações exponenciais complexas é vantajosa na determinação da solução da equação de estado, quer se trate do caso univariável, quer do caso multivariável. De facto, a solução obtida encerra um resultado primordial para os circuitos lineares: as funções sinusoidais são funções próprias destes sistemas; isto é «entrando» um seno/cosseno com uma dada frequência, «sai» o mesmo[5] seno/cosseno, mas com uma amplitude e fase modificadas pelo circuito.

A equação de saída (caso univariável, equação 2) $y(t) = c\, x(t) + d\, u(t)$ assume, para uma entrada exponencial complexa $u(t) = U e^{st}$ a que, por sua vez, corresponde uma solução particular

[5] Entenda-se com a mesma frequência!

$x_p(t) = X\, e^{st}$, a forma $y(t) = c\,(X + d\,U)\, e^{st} \Rightarrow \boxed{y(t) = Y\, e^{st}}$. Ou seja, qualquer variável de interesse no circuito (tensão ou corrente) passa a ser uma exponencial complexa com a mesma frequência da entrada, mas com uma amplitude (complexa) determinável pela função de transferência. Daqui se vê a importância do uso deste tipo de funções na análise de circuitos lineares. No entanto, põe-se a questão de saber como utilizar o formalismo apresentado quando os geradores de tensão ou corrente (as excitações do circuito) são os de interesse prático.

A função de Heaviside, $h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$, é particularmente útil para representar geradores cuja saída muda de estado num dado instante de tempo, por exemplo, ao serem activados. Uma vez que a solução particular é determinada após a activação dos geradores (fontes de tensão ou de corrente), a função de Heaviside que designaremos de escalão unitário[6] é, para $t > 0$, representada pela função $u(t) = U\, e^{st}$, fazendo $U = 1$ e $s = 0$. Na figura seguinte, exemplifica-se a ligação de uma bateria de 12V a um dado circuito (figura 8a) em $t = 0$ através de um gerador independente de tensão contínua, caracterizado por $12\, u(t)$ (figura 8b).

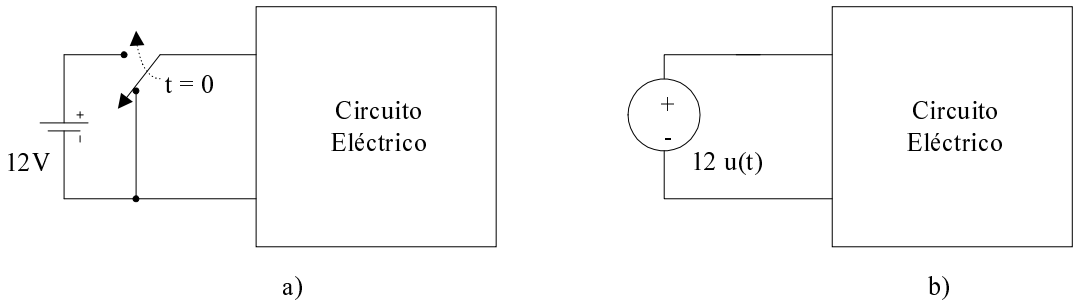


Figura 8 – Exemplo de aplicação da Função de Heaviside ou escalão unitário.

Por sua vez, a fórmula de Euler permite-nos relacionar as excitações sinusoidais com a exponencial complexa, $e^{j\theta} = cos(\theta) + j\, sen(\theta)$. Assim, teremos, $\boxed{cos(\omega t) = Re\{e^{j\omega t}\}} = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ e $\boxed{sen(\omega t) = Im\{e^{j\omega t}\}} = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$. Neste caso, teremos $cos(\omega t) = Re\{U\, e^{st}\}$ em que $U = 1$ e $s = j\omega$. De igual modo, para a função seno teremos $sen(\omega t) = Im\{U\, e^{st}\}$ em que $U = 1$ e $s = j\omega$.

Na figura 9 apresentam-se várias representações da função exponencial complexa $e^{j\omega t}$.

[6] A função escalão unitário será representada por u(t) em vez de h(t).

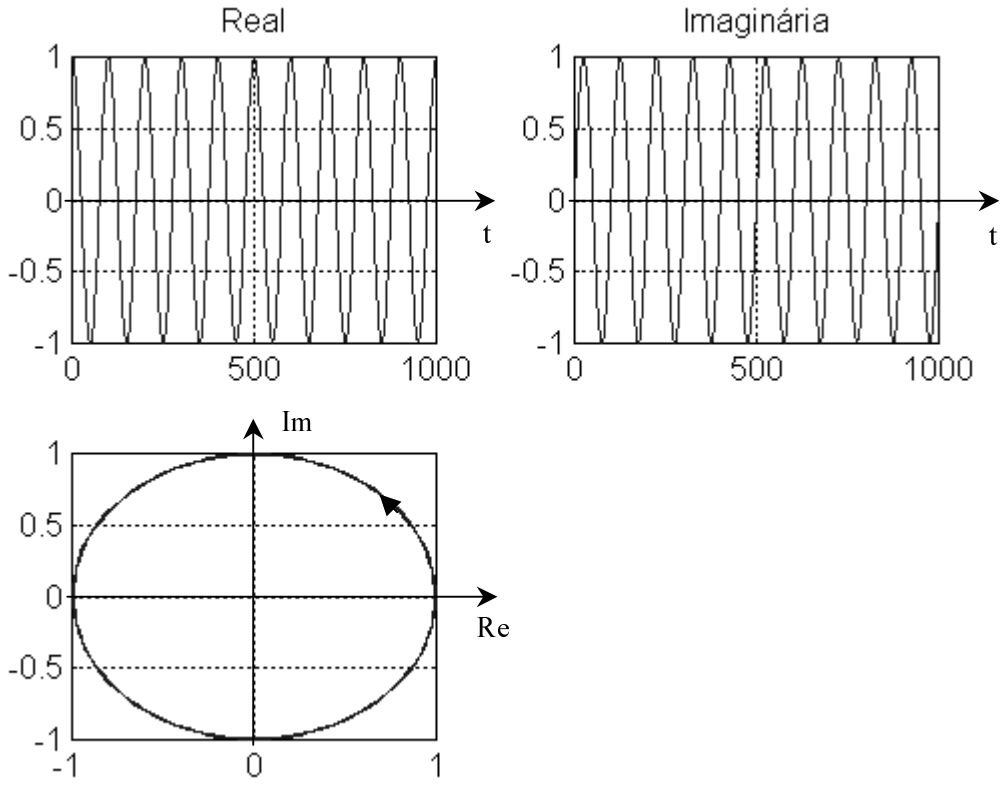


Figura 9 – Exponencial complexa $e^{j\omega t}$: a) $Re\{e^{j\omega t}\}$ versus t; b) $Im\{e^{j\omega t}\}$ versus t; c) plano complexo, Im versus Re.

No exemplo anterior, fez-se $s = j\omega$, no entanto, a variável s pode ter também uma parte real, ficando $s = \sigma + j\omega$ e, neste caso, $u(t) = U\, e^{st} = U\, e^{\sigma t}\, e^{j\omega t}$. Assim, a função $u(t)$ presta-se naturalmente à representação de sinusoides amortecidas. Para tal considere-se que $Re\{s\} = \sigma < 0$, e atente-se na figura 10. No caso de pretendermos representar exponenciais crescentes, faremos $\sigma > 0$ em $u(t) = U\, e^{st} = U\, e^{\sigma t}\, e^{j\omega t}$, representanto-se na figura 11 o exemplo correspondente

Resumindo, as exponenciais complexas apresentam as seguintes vantagens:

- permitem a determinação expedita da solução particular da equação de estado;
- permitem representar uma classe alargada de sinais utilizados na análise de circuitos.

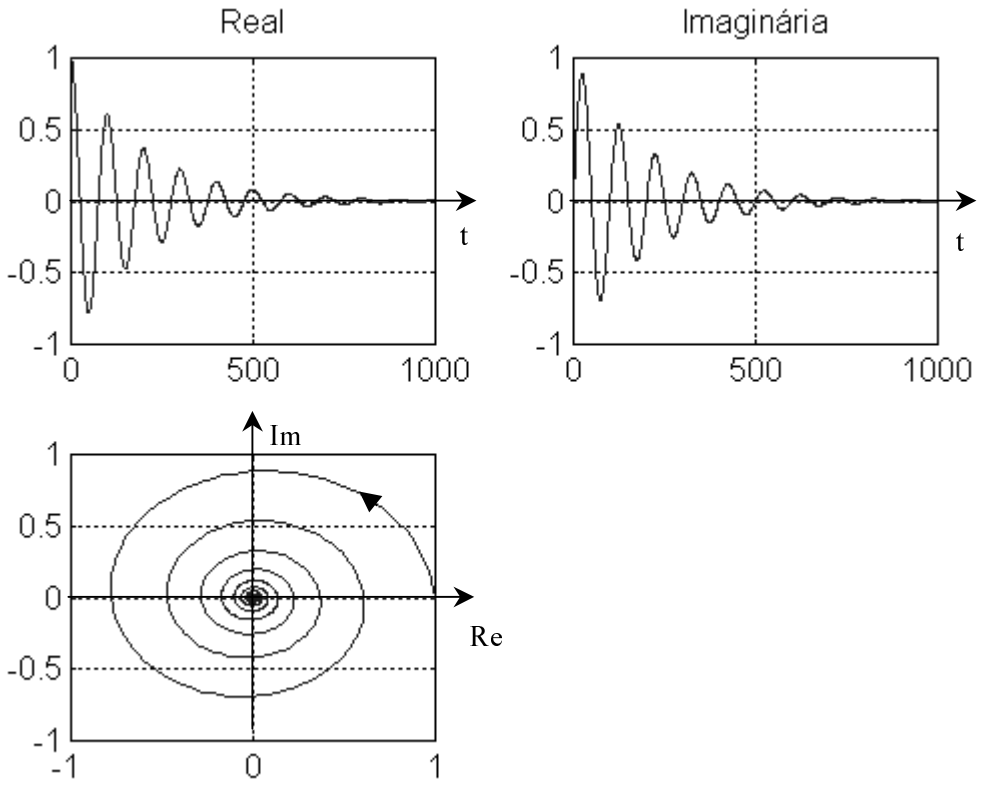


Figura 10 – Exponencial complexa: a) $Re\{e^{st}\}$ versus t; b) $Im\{e^{st}\}$ versus t; c) plano complexo, Im versus Re.

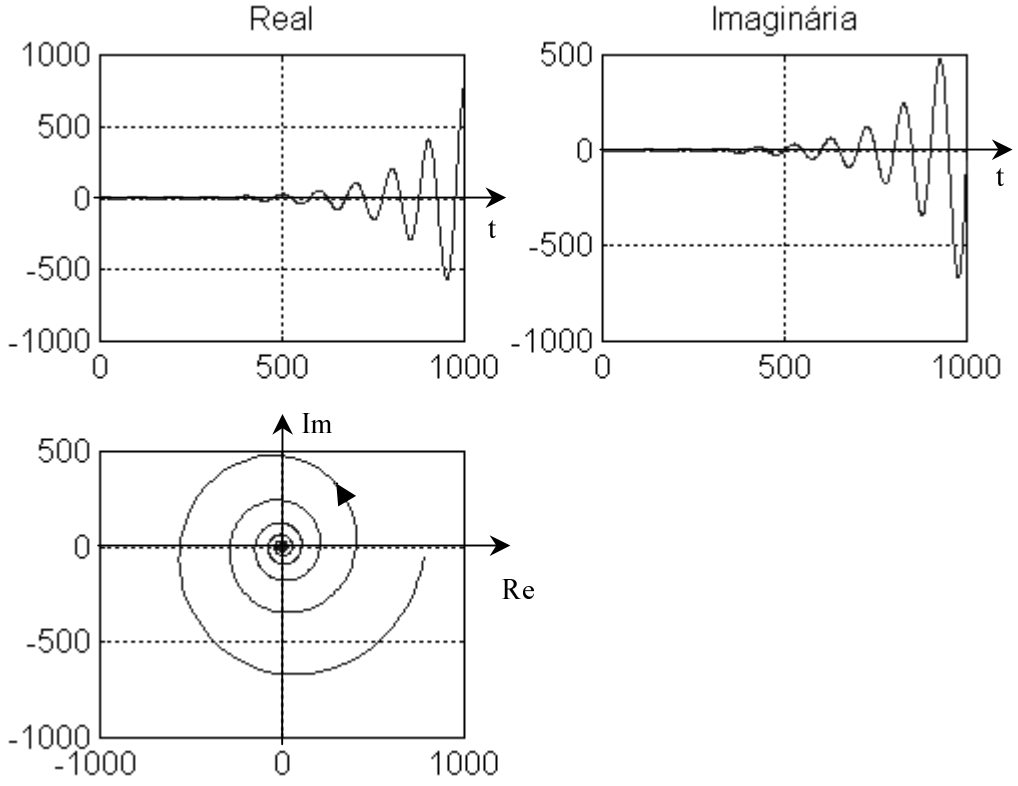


Figura 11 – Exponencial complexa: a) $Re\{e^{st}\}$ versus t; b) $Im\{e^{st}\}$ versus t; c) plano complexo, Im versus Re.

1.4.5 SOLUÇÃO TOTAL E IMPOSIÇÃO DE CONDIÇÕES INICIAIS

A solução da equação de estado, foi obtida anteriormente pelo método da integração directa (equação 19). Contudo, demonstra-se que essa mesma solução é composta por dois termos, a solução homogéna e a solução particular, isto é $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Estas soluções já foram, oportunamente, apresentadas. Falta agora, determinar a constante k da solução homogénea (caso univariável) ou os vectores próprios $K^{(i)}$ associados aos respectivos valores próprios λ_i (frequências naturais do circuito).

Analisemos por ora unicamente o caso univariável, remetendo para os exemplos o caso multivariável. Seja, então x_0 a condição inicial a verificar pela solução $x(t)$ em $t = 0$. Teremos, então, recordando as equações 21, 23 e 31: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = k\, e^{at} + (s - a)^{-1}\, b\, U\, e^{st}$

A variável de estado tem de ser uma função contínua, $\forall\, t$, pelo que a sua derivada é uma função limitada, por forma a que a equação de estado faça sentido. Assim sendo, teremos que na origem do tempo se verifica: $x(0^-) = x(0^+) = x_0$. Pelo que, forçando agora $x(t)$ a verificar a condição inicial teremos, $x_0 = k + (s - a)^{-1}\, b\, U$, e que nos permite determinar a constante k (amplitude da solução homogénea):

Eq.39: $$\boxed{k = x_0 - (s - a)^{-1}\, b\, U}$$

Eq.40: $$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = k\, e^{at} + (s - a)^{-1}\, b\, U\, e^{st} \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = [x_0 - (s - a)^{-1}\, b\, U]e^{at} + (s - a)^{-1}\, b\, U\, e^{st}}$$

A título de curiosidade, compare-se o resultado obtido na equação 40 com o da equação 20.

1.5 REGIMES TRANSITÓRIO, FORÇADO E NATURAL

A título de exemplo, considere-se o circuito da figura 12 em que se representa um circuito R-C passa-baixo, e que já foi alvo de estudo:

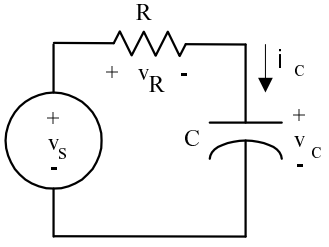


Figura 12 – Circuito R-C passa-baixo.

A correspondente equação de estado para este circuito é a já apresentada na equação 10:

Eq.41: $$\frac{d\,v_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}\,v_c(t) + \frac{1}{RC}\,v_s(t)$$

Suponha-se que o condensador estava inicialmente descarregado, isto é que $v_c(0^-) = 0$ e ainda que a fonte independente excita o circuito com um escalão unitário, isto é, $v_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$.

À equação de estado (equação 41) corresponderá, para $t > 0$, uma solução $v_c(t)$ que se pode obter directamente a partir da equação 40 fazendo:

- $x(t) = v_c(t)$
- $x_0 = v_c(0^-) = 0$
- $s = 0$
- $U = 1$
- $a = -\frac{1}{RC}$
- $b = \frac{1}{RC}$

Assim, ter-se-á para $v_c(t)$ a solução

Eq.42: $$\boxed{v_c(t) = (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})\,u(t)}$$

que se representa na figura 13c). Nas figura 13a) e 13b), apresentam-se, respectivamente, as soluções homogénea e particular de $v_c(t)$.

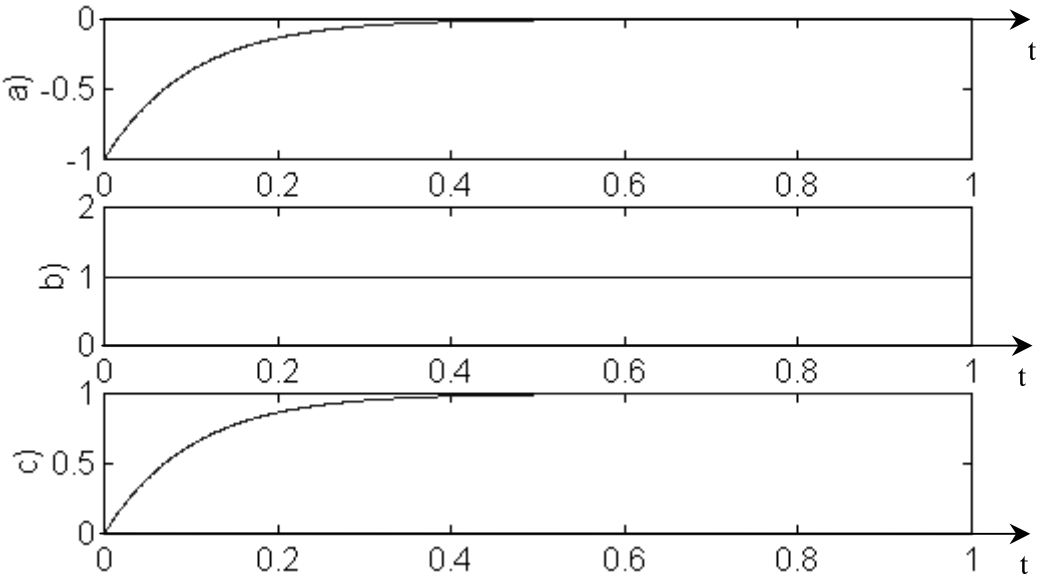


Figura 13 – Soluções homogénea (a), particular (b) e total (c), $\tau = 100ms$.

O factor $\boxed{RC = \tau}$ é denominado constante de tempo do circuito e condiciona a variação temporal de $v_C(t)$; para valores de τ pequenos, a tensão aos terminais do condensador tende mais rapidamente para a solução particular, correspondendo a uma menor duração da resposta homogénea[7]. Inversamente, a valores elevados da constante de tempo τ corresponderá uma maior duração da resposta homogénea. Na figura 14 comparam-se diferentes respostas do circuito RC para, respectivamente, $\tau = 250ms$; $\tau = 100ms$; $\tau = 40\ ms$:

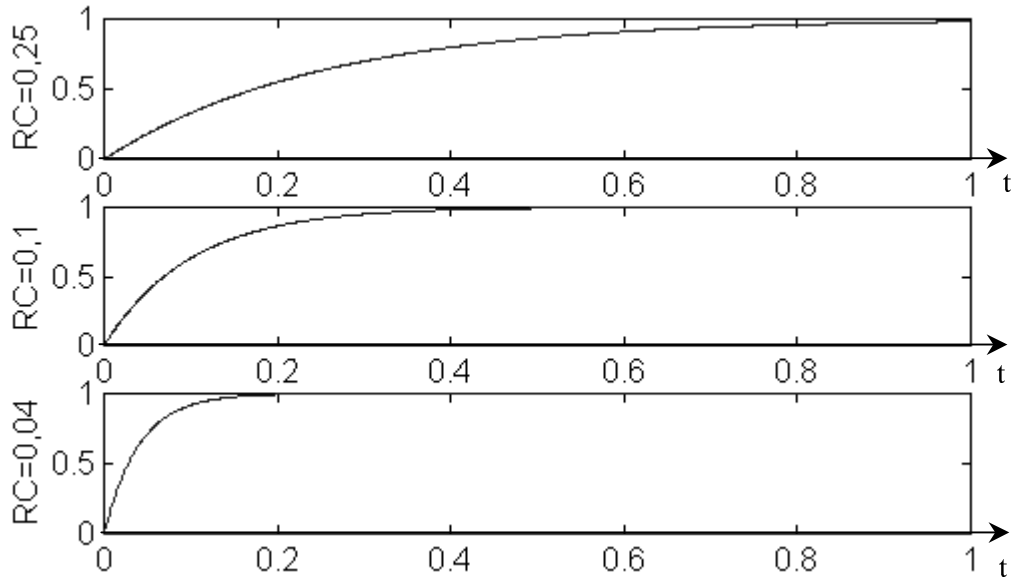


Figura 14 – Efeito da constante de tempo $\tau = RC$ na rapidez da resposta.

Note-se que, depois de decorridas algumas constantes de tempo, $v_C(t)$ é aproximadamente dada pela sua solução particular, o que corresponde a dizer que a solução homogénea é praticamente nula; de facto, para $t > 5\tau$, $e^{-t/\tau} < 0{,}0067$.

É, pois, possível identificar duas zonas de características distintas na resposta do circuito:

- $0 < t < 5\tau$, em que a saída evolui desde a condição inicial até cerca da solução final;
- $t > 5\tau$, em que a saída se mantém constante.

A primeira, é denominada de regime transitório e a segunda de regime forçado. Assim, o regime transitório corresponde ao intervalo de tempo em que a resposta homogénea influencia significativamente a resposta do circuito e o regime forçado obtre-se-á quando a resposta do circuito se identifica com a solução particular.

---

[7] Na realidade, a duração da resposta homogénea é infinita, uma vez que exp(-t/RC) só se anula para t = ∞. Contudo, e para efeitos práticos, diremos que a solução homogénea se anula quando a sua amplitude for desprezável face a outras grandezas.

O comportamento deste circuito pode ser descrito da seguinte forma:

- inicialmente o condensador está descarregado, isto é, $v_C(0^-) = 0$;
- em $t = 0^+$, é aplicada uma fonte escalão unitário. Uma vez que a variável de estado é contínua, a tensão aos terminais do condensador será nula, e a corrente na resistência (é igual à corrente no condensador) será máxima. O condensador começa então a carregar-se;
- para $t > 0$, a carga do condensador vai aumentando, o que corresponde a uma elevação da tensão $v_C(t)$ aos seus terminais. Como a diferença de potencial aos terminais da resistência vai sendo cada vez menor (v_S constante e v_C a aumentar), a corrente de carga do condensador vai diminuindo até se anular para t infinito, ficando o condensador completamente carregado, $v_C(\infty) = 1$ (amplitude do gerador).

Na figura 15 apresentam-se as tensão e corrente no condensador, para melhor ilustração da carga do condensador.

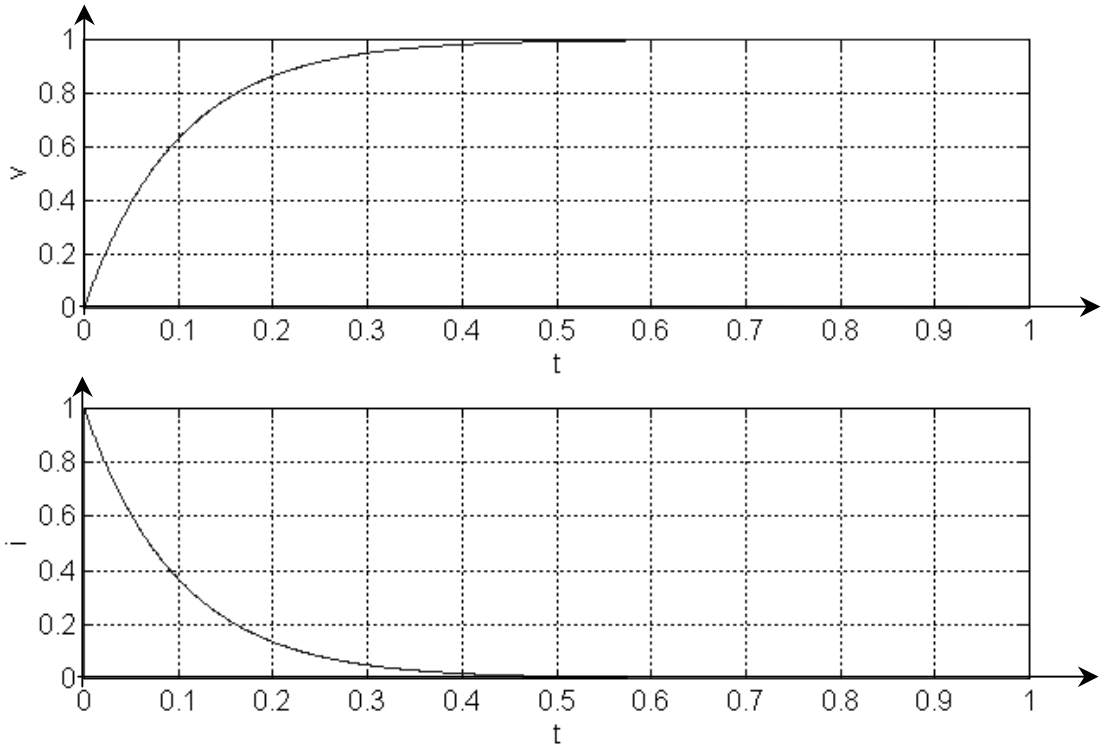


Figura 15 – Tensão (a) e corrente (b) no condensador no circuito RC passa-baixo ($R = 10k\Omega$, $C = 10\mu F$).

Repare-se que, fazendo $t = \tau$ na equação 42 se tem:

- $v_C(\tau) = 1 - e^{-1} = 0{,}632$
- $i_C(\tau) = e^{-1} = 0{,}368$

Ou seja, ao fim de uma constante de tempo, a tensão aos terminais do condensador atinge *63,2%* do seu valor final enquanto que a corrente de carga se reduziu a *36,8%* do seu valor inicial.

É importante referir que, ao invés dos circuitos resistivos que, na ausência de excitação, apresentam uma saída trivial, os circuitos contendo elementos dinâmicos apresentam uma resposta não

nula quando sujeitos a condições iniciais diferentes de zero e que denominaremos de resposta natural. Para verificar este facto, basta considerar a equação de estado com $u(t) \equiv 0$ (equação homogénea), a que corresponde apenas a solução homogénea, $x_h(t)$. Seja x_0 a condição inicial (carga inicial do condensador, por exemplo). Nestes termos, a solução da equação de estado será, para $t \geq 0$,

Eq.43: $\boxed{x(t) = x_0 \, e^{at} \, u(t)}$

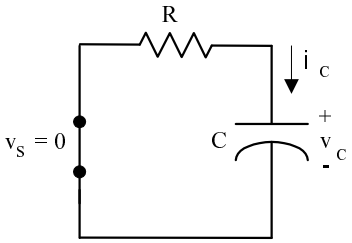


Figura 16 – Circuito RC com excitação nula.

Particularizando para o circuito RC que temos vindo a analisar, faça-se então $v_S(t) = 0$, como se indica na figura 16. Estando o condensador inicialmente carregado, $v_c(0^-)$, a resistência R vai permitir que as cargas armazenadas nas placas se aniquilem gradualmente, anulando a tensão v_c. De facto, fazendo na equação 43:

- $x(t) = v_c(t)$
- $x_0 = v_c(0^-) = 1$ (suponha-se uma carga inicial de C Coulomb)
- $a = -\frac{1}{RC}$ (por análise do circuito[8])

obtém-se a solução da equação de estado para $t > 0$, fazendo $\tau = \frac{1}{RC}$,

Eq.44: $\boxed{v_c(t) = e^{-t/\tau}}$

que corresponde à descarga do condensador através da resistência, figura 17:

[8] Note-se que $v_c = -R \, i_c$ e recordando que $i_c = C \frac{d v_c}{dt}$, teremos então $\frac{d v_c}{dt} = -\frac{1}{RC} \, v_c$.

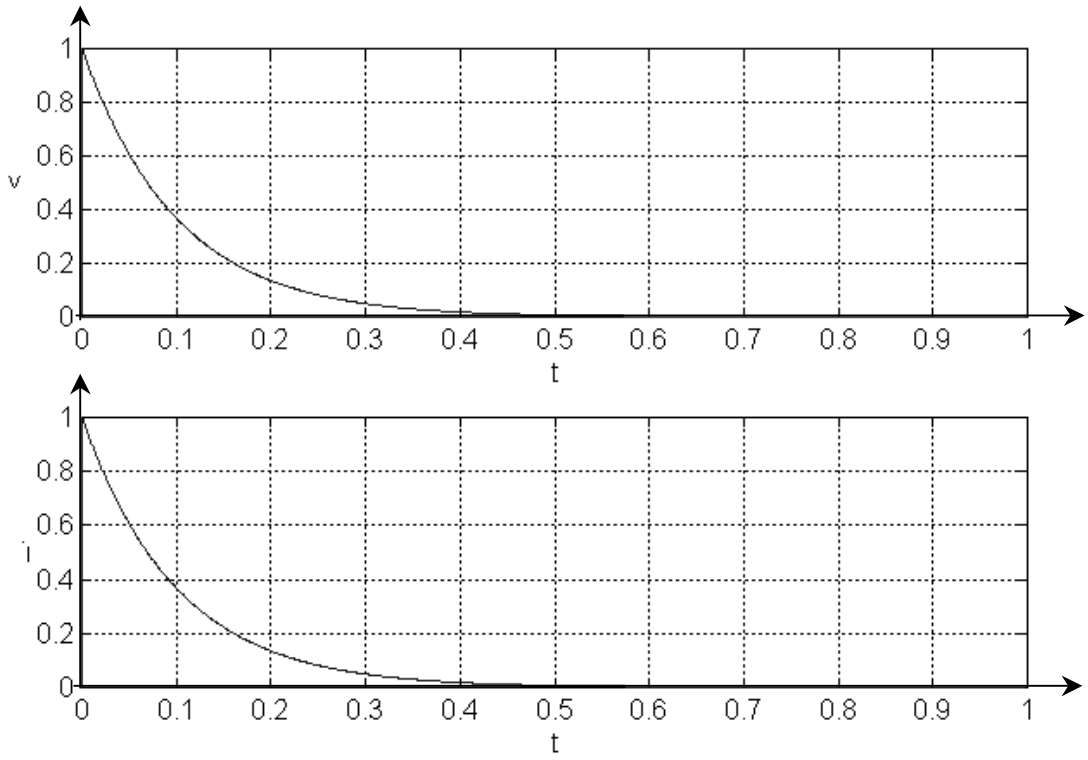


Figura 17 – Descarga do condensador, regime natural.

Poderemos, então, concluir que:

- o regime natural é condicionado pela topologia do circuito (resistência equivalente do circuito com geradores independentes anulados aos terminais do elemento dinâmico, condensador ou bobina) e depende directamente da carga inicial do condensador (circuito RC) ou da corrente inicial na bobina (circuito RL);
- o regime forçado apenas é condicionado pela topologia do circuito e pelos geradores de sinal e não depende das condições iniciais;
- o regime transitório depende do regime forçado e do regime natural.

As análises apresentadas apenas contemplam o circuito RC (passa-baixo), no entanto, o estudo de outros circuitos (por exemplo, com resistências e indutância, RL) pode ser efectuado por um processo em tudo semelhante, isto é:

- identificação da variável de estado;
- obtenção da equação de estado do circuito na forma canónica (equação 1 ou 4);
- obtenção da equação de saída (equação 2 ou 5);
- representação das excitações através de exponenciais complexas;
- solução da equação de estado (equação 40 ou equação 28 adicionada à 36);
- obtenção da variável de saída (equação 32 ou 37).

1.6 ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE CIRCUITOS DINÂMICOS DE 1ª ORDEM, EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

O objectivo deste parágrafo é o de apresentar vários exemplos da resposta de circuitos lineares contendo um único elemento dinâmico a várias funções de entrada, a saber, ao escalão unitário e à sinusoide (com várias frequências), e contemplando diferentes condições iniciais.

1.6.1 RC PASSA-BAIXO: ENTRADA ESCALÃO UNITÁRIO

Na figura 18 apresenta-se o circuito RC passa-baixo já analisado anteriormente e, como já tivémos oportunidade de verificar, sendo $v_C(t)$ a variável de saída deste circuito, teremos para $t > 0$:

Eq.45: $$\boxed{v_C(t) = (1 + k\, e^{-\frac{1}{RC}t})\, u(t)}$$

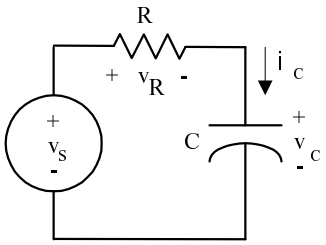


Figura 18 – RC passa-baixo

Para os exemplos que apresentaremos consideraram-se os seguintes valores: R = 1kΩ e C = 1μF.

1.6.1.1 Entrada escalão unitário; C.I. nula, $v_C(0^-) = 0$

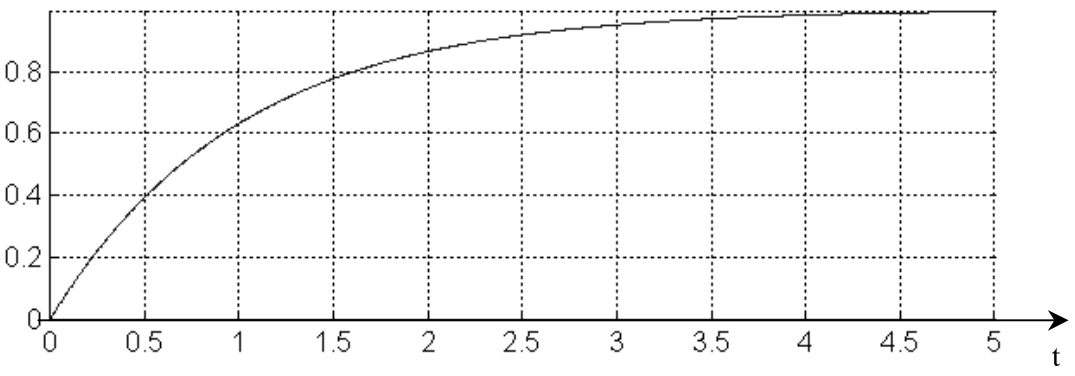


Figura 19 – Resposta ao escalão unitário, $v_C(0^-) = 0$ (t em ms).

Sendo a condição inicial $v_C(0^-) = 0$, determine-se k na equação 45, forçando $v_C(t)$ a passar em 0 para $t = 0$, donde resulta $k = -1$:

Eq.46: $$\boxed{v_C(t) = (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})\, u(t)}$$

Neste circuito, o condensador carregar-se-á gradualmente até atingir a tensão do gerador através da resistência R que imporá a máxima corrente de carga, $i_C(0) = \frac{1}{R}$.

1.6.1.2 Entrada escalão unitário; C.I. unitária, $v_C(0^-) = 1$

Neste caso, a constante *k* será nula, pelo que,

Eq.47: $\boxed{v_C(t) = u(t)}$

Ou seja, sendo a condição inicial igual à solução particular em $t = 0$, a solução homogénea é nula não havendo, por isso, regime transitório. Neste circuito, tal facto corresponde a dizer que, se o condensador se encontrar inicialmente carregado com *1V*, e, uma vez que a tensão do gerador independente de tensão é também de *1V*, a diferença de potencial aos terminais da resistência permanecerá nula, pelo que não haverá corrente no circuito. Ou seja, o condensador nem é carregado (como sucedia na secção 1.6.1.2) nem se descarrega, pelo que a tensão aos seus terminais permanecerá constante, figura 20:

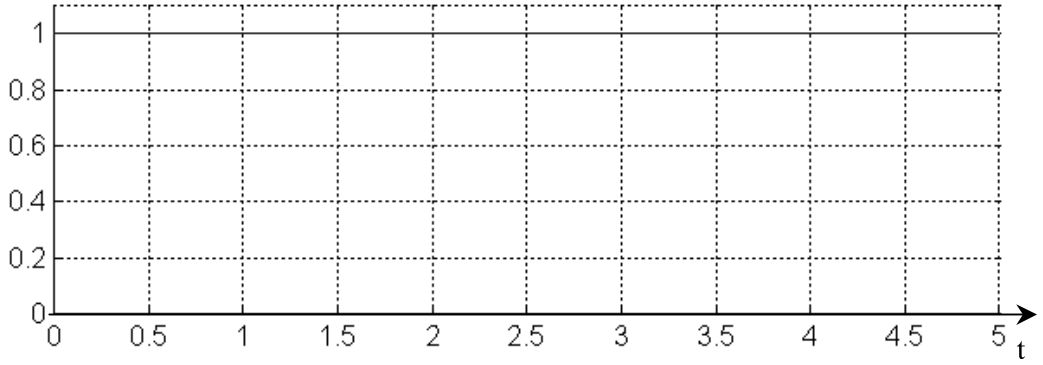


Figura 20 – Resposta ao escalão unitário, $v_C(0^-) = 1$ (*t* em ms).

1.6.1.3 Entrada escalão unitário; $v_C(0^-) = -1$

Uma vez que a condição inicial é $v_C(0^-) = -1$ e sendo a solução particular $v_{Cp}(t) = 1$, obtém-se para a tensão aos terminais do condensador,

Eq.48: $\boxed{v_C(t) = (1 - 2\ e^{-\frac{1}{RC}t})\ u(t)}$

Como se pode observar da figura 21, o condensador ir-se-á carregar desde uma tensão de *–1V* até atingir a tensão do gerador independente, ou seja, neste caso, *1V*.

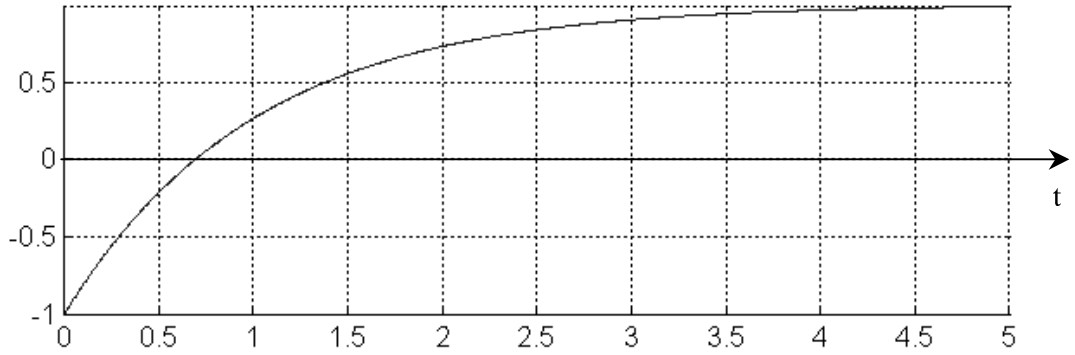


Figura 21 – Resposta ao escalão unitário, $v_C(0^-) = -1$ (t em ms).

1.6.1.4 Entrada escalão unitário; $v_C(0^-) = 2$

Neste caso, sendo $v_C(0^-) = 2$ e mantendo-se a solução particular $v_C(t) = 1$, a constante k vem igual a 1, pelo que se obtém para a tensão aos terminais do condensador,

Eq.49: $$v_C(t) = (1 + e^{-\frac{1}{RC}t})\, u(t)$$

Como se pode observar da figura 22, o condensador ir-se-á descarregar desde uma tensão de $2V$ até atingir a solução particular (1V).

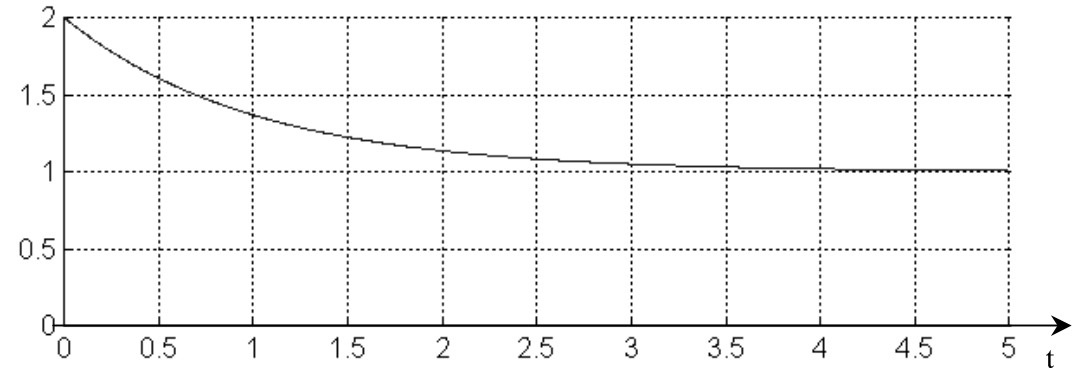


Figura 22 – Resposta ao escalão unitário, $v_C(0^-) = 2$ (t em ms).

1.6.2 RC PASSA-BAIXO: ENTRADA SINUSOIDAL

Seja $v_S(t) = \cos(\omega t)\, u(t)$, sendo $u(t)$ o escalão unitário, no circuito da figura 18. Sabendo que $\cos(\omega t) = Re\{e^{st}\}$ com $s = j\omega$, põe-se agora o problema de como utilizar o formalismo apresentado na secção 1.4.3 (isto é, a solução particular para excitações exponenciais complexas) para determinar a solução particular e, consequentemente, a solução total para a tensão $v_C(t)$ aos terminais do condensador.

Para tal, e sabendo que se trata de um circuito linear, poderemos referir o uso da sobreposição linear de fontes. Uma vez que $cos(\omega t) = \frac{1}{2}[\, e^{st} + e^{-st}]$ com $s = j\,\omega$, podemos entender $v_s(t)$ como sendo composta por dois geradores distintos, isto é, $v_s(t) = \frac{1}{2}[\, v_s^{(1)}(t) + v_s^{(2)}(t)]$ em que $v_s^{(1)}(t) = e^{j\omega t}$ e $v_s^{(2)}(t) = e^{-j\omega t}$. Relembrando que para uma excitação exponencial complexa e^{st} se tem uma solução particular da equação de estado $x_p(t) = X e^{st} = (s - a)^{-1}\, b\, U e^{st}$ (equação 31) e, uma vez que $s = j\omega$, teremos

Eq.50: $$x_p(t) = X e^{j\omega t} = (j\omega - a)^{-1}\, b\, U e^{j\omega t}$$

Se a excitação for afectada de um factor de escala tendo-se, agora, $\frac{1}{2} e^{st}$, imediatamente se verá a partir da equação 50 que a solução particular será $\frac{1}{2} X e^{j\omega t} = \frac{1}{2} (j\omega - a)^{-1}\, b\, U e^{j\omega t}$. De igual forma, poderemos verificar que, se a frequência da excitação for de $-\omega$ em vez de ω, a solução particular será dada por $(-j\omega - a)^{-1}\, b\, U e^{-j\omega t}$; o que não é mais do que tomar o conjugado da solução particular apresentada na equação 50. Sendo o circuito linear, a uma combinação linear das excitações, isto é, $\frac{1}{2}[\, v_s^{(1)}(t) + v_s^{(2)}(t)]$, corresponderá idêntica combinação linear das respostas a cada uma das excitações tomadas individualmente, ou seja, a solução particular será dada por $\frac{1}{2}[\, X e^{j\omega t} + X^* e^{-j\omega t}]$. Este resultado é equivalente a se ter para a solução particular a parte real da solução já apresentada na equação 50, $Re\{X e^{j\omega t}\}$.

Se a entrada do circuito for $sen(\omega t)$ em vez de $cos(\omega t)$, utilizando mais uma vez a sobreposição de fontes, é possível verificar que a solução particular será $Im\{X e^{j\omega t}\}$.

Estes resultados podem ser resumidos na tabela A:

TABELA A

PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO PARTICULAR PARA EXCITAÇÕES EXPONENCIAIS COMPLEXAS

Excitação $v_s(t)$	**Solução Particular** $x_p(t)$
e^{st}	$X\,e^{st} = (s-a)^{-1}\,b\,U\,e^{st}$
$e^{j\omega t}$	$X\,e^{j\omega t} = (j\omega-a)^{-1}\,b\,U\,e^{j\omega t}$
$[e^{j\omega t}]^*$	$X^*\,e^{-j\omega t} = [(j\omega-a)^{-1}\,b\,U\,e^{j\omega t}]^*$
$k\,e^{j\omega t}$	$k\,X\,e^{st} = k\,(s-a)^{-1}\,b\,U\,e^{st}$
$e^{s_1 t} + e^{s_2 t}$	$X_1\,e^{s_1 t} + X_2\,e^{s_2 t} = (s_1-a)^{-1}\,b\,U e^{s_1 t} + (s_2-a)^{-1}\,b\,U\,e^{s_2 t}$
$\cos(\omega t) = Re\{e^{j\omega t}\}$	$Re\{X\,e^{j\omega t}\} = Re\{(j\omega-a)^{-1}\,b\,U\,e^{j\omega t}\}$
$sen(\omega t) = Im\{e^{j\omega t}\}$	$Im\{X\,e^{j\omega t}\} = Im\{(j\omega-a)^{-1}\,b\,U\,e^{j\omega t}\}$

Seja, então $v_s(t) = \cos(\omega t)\,u(t)$ e, como se acabou de ver, $v_{cp}(t) = Re\{(j\omega-a)^{-1}\,b\,U\,e^{j\omega t}\}$, sendo $a = -\frac{1}{RC}$, $b = \frac{1}{RC}$, $U = 1$. Teremos agora, $v_{cp}(t) = Re\{\frac{RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\,\frac{1}{RC}\,e^{-arctg(\omega RC)}e^{j\omega t}\}$ e, finalmente,

Eq.51: $$\boxed{v_{cp}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - arctg(\omega RC))}$$

Vemos, assim, que, $v_c(t)$ é uma «réplica» da excitação $\cos(\omega t)$, mas com uma amplitude modificada pelo factor $\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \leq 1$ e com uma desfasagem (atraso) de $arctg(\omega RC)$; quer a amplitude da saída, quer a desfasagem dependem da frequência ω da excitação.

A solução total para a tensão aos terminais do condensador é $v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$, ou seja, a soma das soluções homogénea e particular:

Eq.52: $$v_c(t) = k\,e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - arctg(\omega RC)).$$

Sendo $v_C(0^-)$ a condição inicial imposta pelo condensador, teremos finalmente para a solução total para $v_C(t)$ a equação 53,

Eq.53:
$$v_C(t) = [v_C(0^-) - \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(-arctg(\omega RC))]e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t - arctg(\omega RC))$$

que se pode obter da equação 52 fazendo $t = 0$.

Vejamos alguns casos particulares deste resultado, nomeadamente:

- entrada sinusoidal, $\omega << 1/\tau = 1/RC$
  - condições iniciais nulas: $v_C(0^-) = 0$
  - condição inicial unitária: $v_C(0^-) = 1$
  - condição inicial: $v_C(0^-) = 2$
- entrada sinusoidal, $\omega = 1/\tau$
  - condições iniciais nulas: $v_C(0^-) = 0$
- entrada sinusoidal, $\omega >> 1/\tau$
  - condição inicial nula: $v_C(0^-) = 0$
  - condição inicial unitária: $v_C(0^-) = 1$

1.6.2.1 Excitação sinusoidal com $\omega << \frac{1}{\tau}$; C.I. nula, $v_C(0^-) = 0$

Uma vez que a condição inicial é nula e que a frequência da excitação é muito menor do que a constante de tempo do circuito, teremos

Eq.54:
$$v_C(t) \cong [-e^{-\frac{t}{RC}} + \cos(\omega t)]\, u(t)$$

Na figura 23 apresenta-se a tensão no condensador $v_C(t)$ considerando, como anteriormente, no circuito da figura 18, R = 1kΩ, C = 1μF, correspondendo a $\tau = 1ms$.

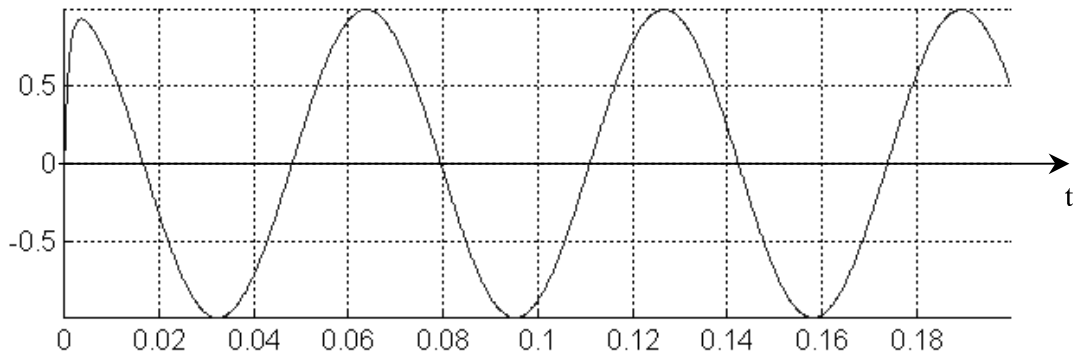


Figura 23 – Resposta ao cosseno, $\omega = 10^2$ rad/s, $v_C(0^-) = 0$.

1.6.2.2 Excitação sinusoidal com $\omega << \frac{1}{\tau}$; C.I. unitária, $v_C(0^-) = 1$

Teremos, uma vez que a condição inicial é unitária, e que a frequência da excitação é muito menor do que a constante de tempo do circuito,

Eq.55: $$v_C(t) = \cos(\omega t)\, u(t)$$

Na figura 24 apresenta-se a tensão no condensador $v_C(t)$.

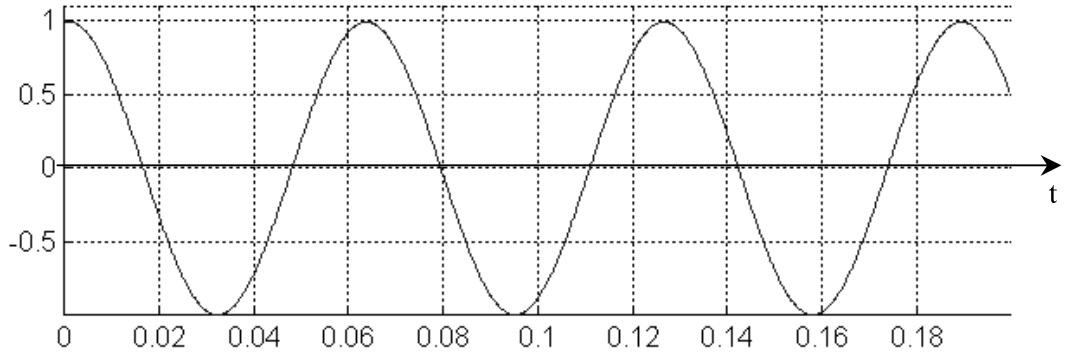


Figura 24 – Resposta ao cosseno, $\omega = 10^2$ *rad/s*, $v_C(0^-) = 1$.

Note-se que, neste caso, o regime transitório não ocorre, uma vez que a condição inicial iguala a solução particular para $t = 0$.

1.6.2.3 Excitação sinusoidal com $\omega << \frac{1}{\tau}$; $v_C(0^-) = 2$

Neste caso, teremos o seguinte resultado para a tensão aos terminais do condensador:

Eq.56: $$v_C(t) = \left[e^{-\frac{t}{RC}} + \cos(\omega t) \right] u(t)$$

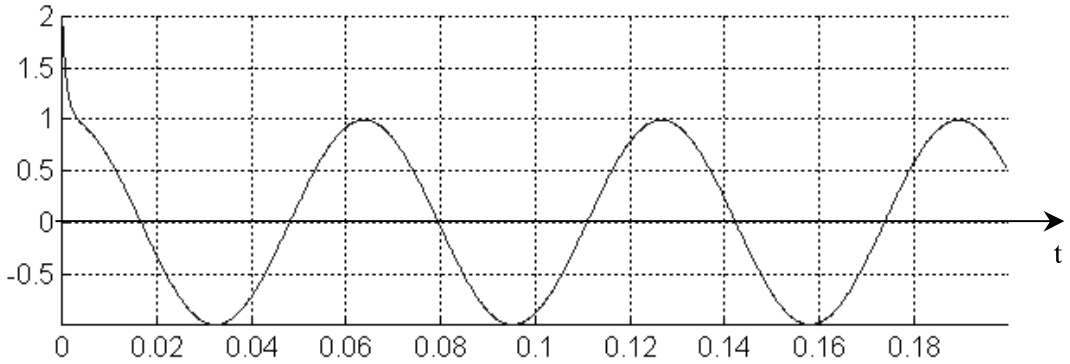


Figura 25 – Resposta ao cosseno, $\omega = 10^4$ *rad/s*, $v_C(0^-) = 2$.

1.6.2.4 Excitação sinusoidal com $\omega = \frac{1}{\tau}$; $v_c(0^-) = 0$

Neste caso, frequência do gerador $\omega = \frac{1}{\tau}$ e condição inicial nula, teremos o seguinte resultado para a tensão aos terminais do condensador:

Eq.57:

$$v_c(t) = [-\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})] \, u(t)$$

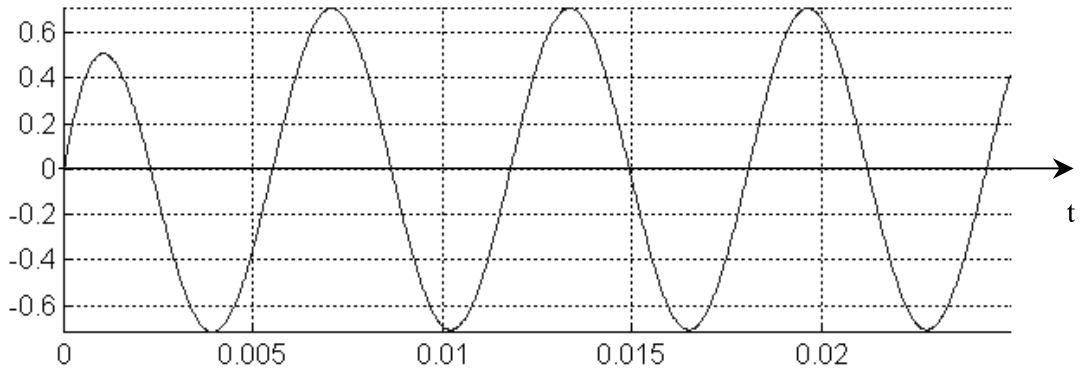


Figura 25 – Resposta ao cosseno, $\omega = 10^3$ *rad/s*, $v_c(0^-) = 0$.

Compare-se este resultado com o da figura 23: imediatamente se observa uma menor amplitude para o regime forçado, sendo neste caso de $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,707$ enquanto que, anteriormente, era unitária.

1.6.2.5 Excitação sinusoidal com $\omega >> \frac{1}{\tau}$; $v_c(0^-) = 0$

Neste caso, como a frequência do gerador é bastante elevada, virá na equação 53, $\omega RC >> 1$, pelo que teremos o seguinte resultado para a tensão aos terminais do condensador:

Eq.58:

$$v_c(t) = [-\frac{1}{\omega RC} \cos(arctg(\omega RC)) \, e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\omega RC} \cos(\omega t - arctg(\omega RC))] \, u(t)$$

Assim, a amplitude do regime forçado (solução particular) será bastante reduzida com o aumento da frequência do gerador, donde a designação de circuito passa-baixo (isto é, «passam» as baixas frequências).

Na figura 26 apresenta-se $v_c(t)$ para uma frequência de $5.\ 10^4$ rad/s e uma condição inicial nula.

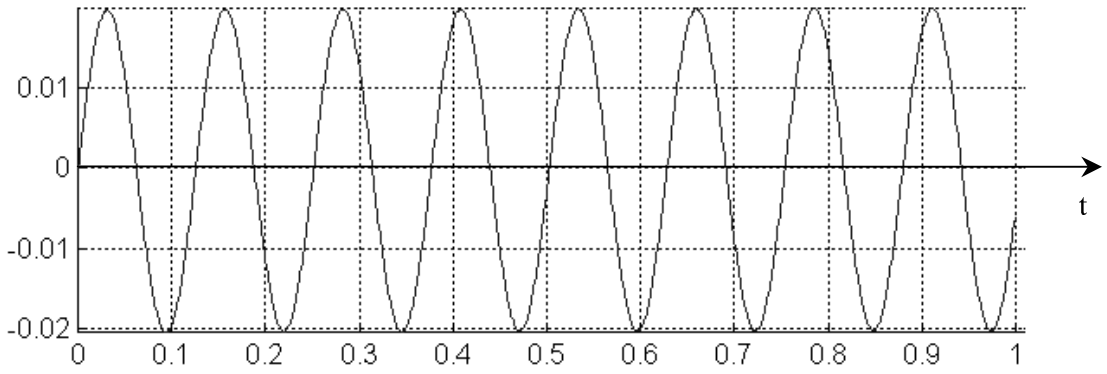


Figura 26 – Resposta ao cosseno, $\omega = 5\ 10^4$ *rad/s*, $v_c(0^-) = 0$ (*t* em ms).

1.6.2.6 Excitação sinusoidal com $\omega >> \frac{1}{\tau}$; $v_c(0^-) = 1$

Neste caso, como a frequência do gerador é bastante elevada, virá na equação 53, $\omega RC >> 1$, pelo que teremos o seguinte resultado para a tensão aos terminais do condensador:

Eq.59:

$$v_c(t) = [\ 1 - \frac{1}{\omega RC} cos\ (arctg(\omega RC))\ e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\omega RC}\ cos(\omega t - arctg(\omega RC))\ ]\ u(t)$$

Como se viu em 1.6.2.5, a amplitude do regime forçado (solução particular) será bastante reduzida com o aumento da frequência do gerador, donde a designação de circuito passa-baixo (isto é, «passam» as baixas frequências).

Na figura 27 apresenta-se $v_c(t)$ para uma frequência de $5.\ 10^4$ rad/s e uma condição inicial unitária. Observe-se a diminuta amplitude da solução particular face à amplitude da solução homogénea, consequência de uma frequência elevada no gerador de tensão.

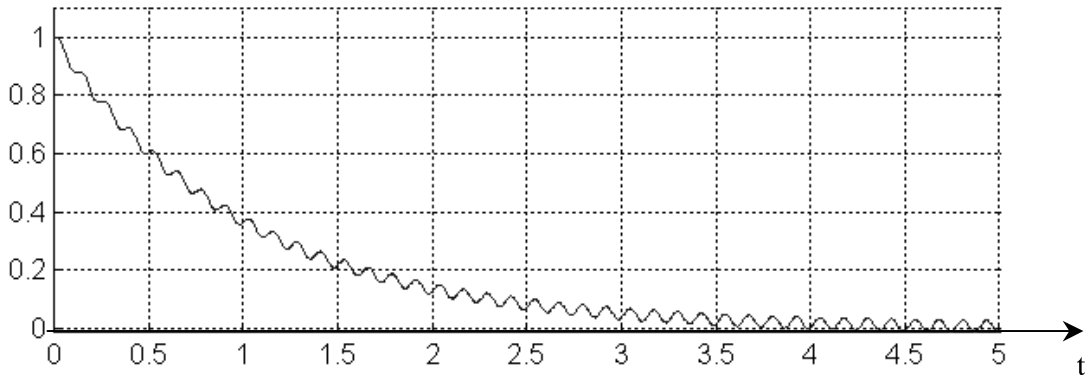


Figura 26 – Resposta ao cosseno, $\omega = 5\ 10^4$ *rad/s*, $v_c(0^-) = 1$ (*t* em ms).

1.6.3 CIRCUITO RC PASSA-ALTO

Consideremos o circuito da figura 27; trata-se da mesma topologia do circuito RC passa-baixo, trocando as posições relativas da resistência e do condensador. Nestes termos, a equação de estado será a mesma, isto é:

Eq.60:
$$\frac{d\,v_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}\,v_c\,(t) + \frac{1}{RC}\,v_s\,(t)$$

enquanto que a equação de saída (equação 2) será agora:

Eq.61:
$$v_o(t) = v_s(t) - v_c(t)$$

Basicamente, em vez de se tomar a tensão aos terminais do condensador como saída do circuito, estaremos a considerar que esta passou a ser a tensão aos terminais da resistência. Assim, torna-se desnecessário obter uma nova solução para a variável de estado, uma vez que a única diferença para o circuito RC passa-baixo reside na equação de saída.

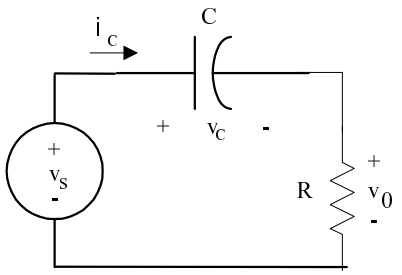


Figura 27 – Circuito RC Passa-Alto.

1.6.3.1 Entrada Escalão Unitário; C.I. nula, $v_c(0^-) = 0$

Teremos que a tensão de saída do circuito é agora:

Eq.62:
$$\boxed{v_o(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}\,u(t)}$$

e que se representa na figura 28, supondo que R = 1kΩ e C = 1μF. Note-se que, sendo a saída a tensão aos terminais da resistência, teremos também uma indicação da corrente de carga/descarga do condensador uma vez que $i_c = \frac{v_o}{R}$.

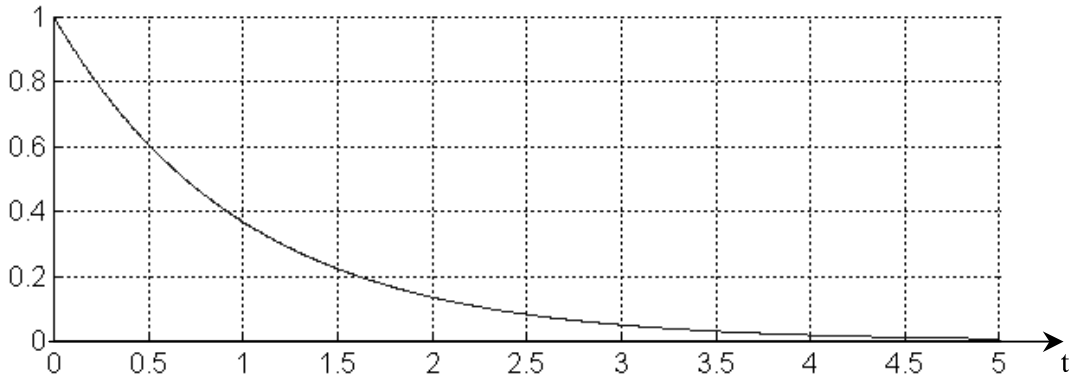


Figura 28 – Resposta ao escalão unitário para o circuito RC passa-alto, condições iniciais nulas (*t* em *ms*).

1.6.3.2 Excitação sinusoidal com $\omega << \frac{1}{\tau}$; $v_c(0^-) = 0$

Partindo da equações 60, obtém-se para a saída, usando as equações 53 e 61:

Eq.63:

$$v_O(t) = [\cos(\omega t) - \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cos(-arctg(\omega RC))\, e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cos(\omega t - arctg(\omega RC))]\, u(t)$$

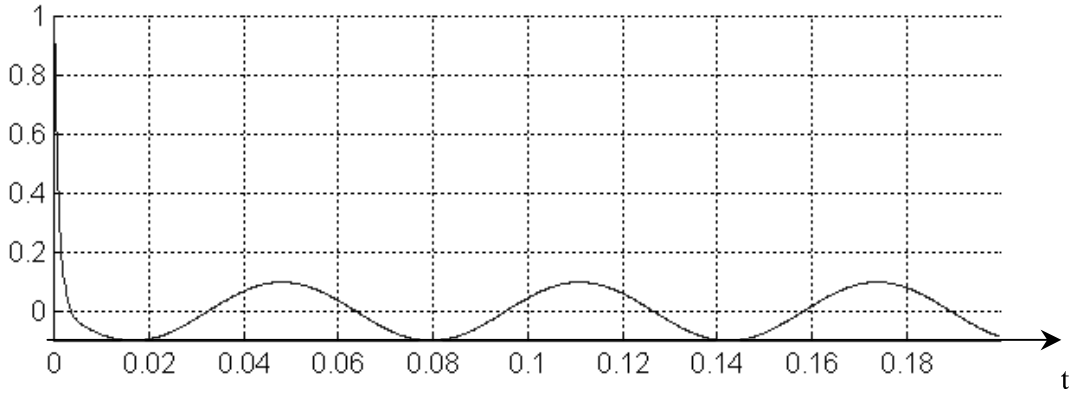


Figura 29 – Resposta ao cosseno, condição inicial nula e $\omega = 10^2$ rad/s.

1.6.3.3 Excitação sinusoidal com $\omega = \frac{1}{\tau}$; $v_c(0^-) = 0$

Neste caso, a saída será dada por:

Eq.64:

$$v_O(t) = [\cos(\omega t) - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})]\, u(t)$$

Na figura 30 encontra-se representada a tensão de saída para o circuito RC passa-alto; note-se a maior amplitude da resposta forçada em relação à obtida quando $\omega << \frac{1}{\tau}$:

t

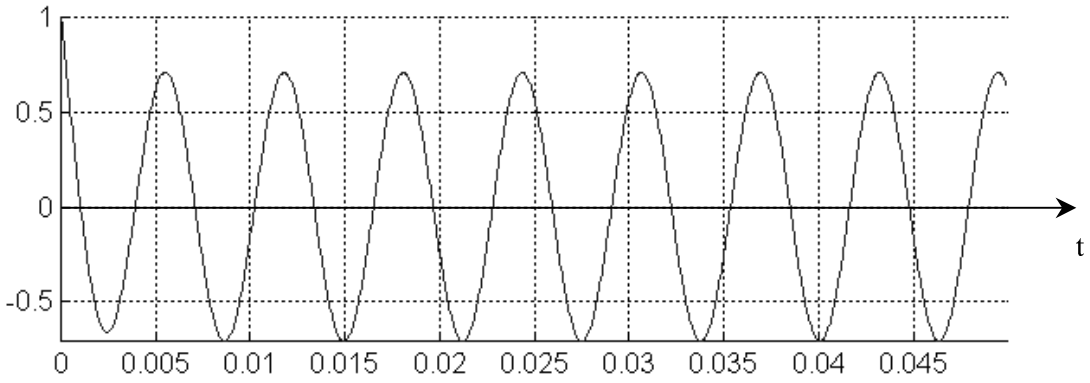


Figura 30 - Resposta ao cosseno, condição inicial nula e $\omega = 10^3$ rad/s.

1.6.3.4 Excitação sinusoidal com $\omega >> \frac{1}{\tau}$; $v_c(0^-) = 0$

Neste caso, teremos para a saída:

Eq.65: $$\boxed{v_o(t) \cong [\cos(\omega t)]\, u(t)}$$

Na figura 31 representa-se a tensão de saída:

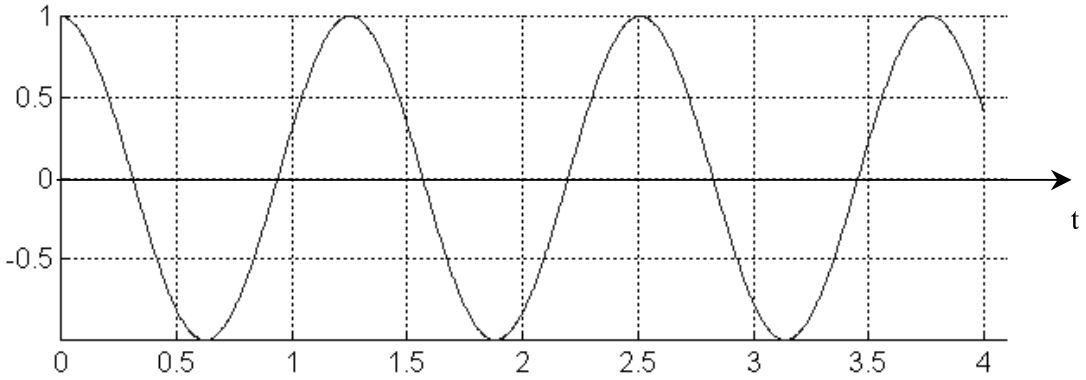


Figura 31 - Resposta ao cosseno, condição inicial nula e $\omega = 5\ 10^4$ rad/s (*t* em *ms*).

1.6.4 CIRCUITO R-L PASSA-BAIXO

Considere-se agora o circuito da figura 32, onde se representa um indutor de coeficiente de auto-indutância L. Neste circuito, a saída é a tensão aos terminais da resistência.

A equação de estado é:

Eq.66: $$\boxed{\frac{d\, i_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i_L(t) + \frac{1}{L} v_s(t)}$$

e

Eq.67: $$\boxed{v_o(t) = R\, i_L(t)}$$

a correspondente equação de saída.

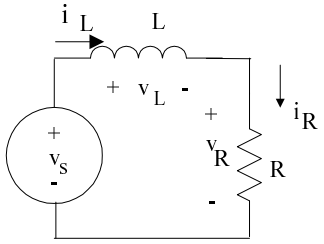


Figura 32 – Circuito RL passa-baixo.

Note-se, neste caso, o seguinte:

- a identidade formal entre as equações 66 e 41 (respeitante ao circuito RC passa-baixo). Assim, a corrente na bobina i_L «desempenha» o papel da tensão no condensador;
- a equação de saída constitui uma «mudança de escala» na variável de estado (resulta do produto de i_L pela resistência R).

Assim sendo, torna-se desnecessário apresentar o comportamento deste circuito nas excitações escalão unitário e sinusoidal, remetendo o seu estudo para o circuito RC passa-baixo tendo, contudo, o cuidado de substituir RC por $\frac{L}{R}$ na constante de tempo.

1.6.5 CIRCUITO R-L PASSA-ALTO

Na figura 33 apresenta-se um circuito RL passa alto, em que a tensão de saída é obtida aos terminais da bobina:

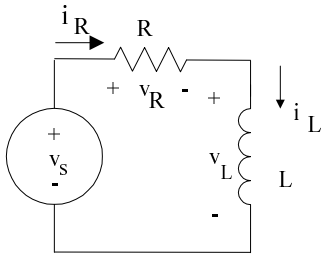


Figura 32 – Circuito RL passa-alto.

A equação de estado é:

Eq.68:

$$\boxed{\frac{d\,i_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}\,i_L(t) + \frac{1}{L}\,v_s(t)}$$

sendo a equação de saída,

Eq.69: $$\boxed{v_O(t) = v_S(t) - R\, i_L(t)}$$

Tendo em atenção que:

- a identidade formal entre as equações 68 e 60 e as equações 69 e 61 (respeitante ao circuito RC passa-alto). Assim, a corrente na bobina i_L «desempenha» o papel da tensão no condensador;
- a equação de saída constitui uma «mudança de escala» na variável de estado (resulta do produto de i_L pela resistência R).

Assim sendo, torna-se desnecessário apresentar o comportamento deste circuito nas excitações escalão unitário e sinusoidal, remetendo o seu estudo para o circuito RC passa-alto tendo, contudo, o cuidado de substituir RC por $\frac{L}{R}$ na constante de tempo.

1.7 CIRCUITOS DE 2ª ORDEM (CASO MULTIVARIÁVEL)

Os circuitos com 2 elementos dinâmicos (tipo A) serão, à semelhança do sucedido para os de 1ª ordem, classificados de acordo com as suas características na frequência. Contudo, enquanto que, de um modo geral, se poderá fazer a seguinte analogia

circuito passa-baixo ⇔ circuito integrador

circuito passa-alto ⇔ circuito diferenciador

entre o comportamento nos domínios do tempo e da frequência para circuitos de 1ª ordem, já nos de 2ª ordem, será mais difícil observar tal correspondência. Regresssaremos a este assunto nos parágrafos dedicados ao estudo da resposta em frequência.

Iremos, de seguida, analisar um circuito de 2ª ordem, RLC passa-baixo, às excitações escalão unitário e sinusoidal e apenas será considerado o caso correspondente a condições iniciais nulas.

1.7.1 CIRCUITO RLC PASSA-BAIXO

Analisaremos como exemplo de um circuito do tipo passa-baixo de 2ª ordem o circuito RLC da figura 33, a que corresponderão as seguintes equações de estado e de saída:

Eq.70: $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v_S(t)$$

Eq.71: $$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + 0\, v_S(t)$$

O processo de obtenção das equações 70 e 71 foi descrito em 1.3.2 e, neste caso, tomando a saída do circuito aos terminais do condensador, *y(t)* representará a variável de saída.

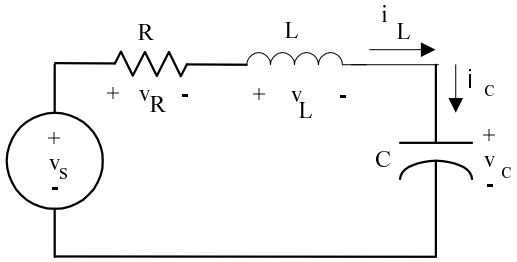


Figura 33 – Circuito RLC passa-baixo.

1.7.1.1 Entrada Escalão Unitário; C.I. nula, $v_c(0^-) = 0$

Sabendo que a equação de estado tem duas soluções — homogénea e particular — comecemos por determinar esta última: $x_p(t) = X\, e^{st} = (sI - A)^{-1}\, B\, U\, e^{st}$ em que, à semelhança do habitual, *x(t)* designa o vector de estado ou seja, $x(t) = [v_c(t) \quad i_L(t)]^T$. Como, para $t > 0$ a excitação é constante e unitária teremos $U = 1$ e $s = 0$, pelo que

$$x_p(t) = X = (-A)^{-1}\, B$$

em que $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$.

resultando em:

Eq.72:
$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} p = x_p(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A interpretação deste resultado (equação 72) é imediata uma vez que, em regime estacionário, o condensador comportar-se-á como um circuito aberto e a bobina como um curto-circuito, pelo que haverá uma corrente $i_L(t) = 0$ e aos terminais do condensador teremos a diferença de potencial de 1Volt imposta pelo gerador de tensão.

A determinação da solução homogénea passa, como é sabido (equação 28), pela resolução da equação característica (equação 27), resultando nos valores e vectores próprios da matriz A:

Eq.73:
$$det\,[\lambda I - A] = 0$$

No caso em questão, a equação 73 resulta em:

Eq.74:
$$\boxed{\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0}$$

A equação 74 tem como soluções λ_i, i =1, 2:

$$\lambda_{\substack{1\\2}} = -\frac{R}{2L}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L}{CR^2}}\right]$$

para $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ e:

Eq.75:
$$\lambda_{\substack{1\\2}} = -\frac{R}{2L}\left[1 \pm j\sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}\right]$$

para $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Ou seja, quando o valor de R for maior do que (ou igual a) $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ as frequências naturais do circuito serão reais e, caso contrário, complexas conjugadas. Na figura 34 apresenta-se o lugar geométrico (no plano complexo) para λ_1 e λ_2 em função do valor de *R*, assinalando-se com um X alguns valores de λ mais relevantes.

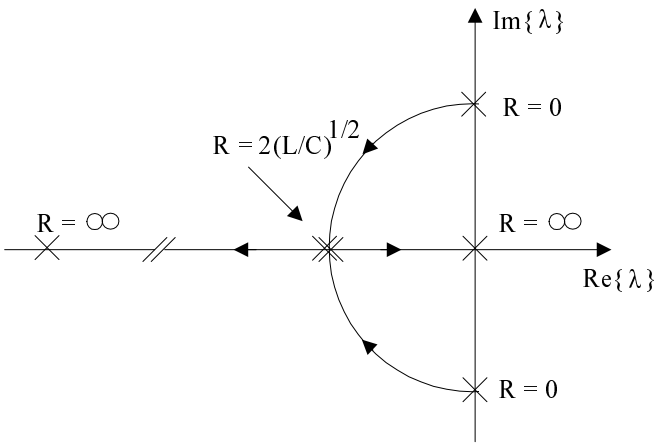


Figura 34 – Lugar geométrico das raízes da equação característica (frequências naturais).

Uma vez obtidas as frequências naturais, trata-se de obter a restante solução homogénea que passa pela determinação dos vectores próprios $K^{(i)} = [k_1^i;\ k_2^i]$ associados a cada uma das frequências naturais (valores próprios da matriz *A*):

Eq.76:
$$\boxed{[\lambda_i I - A]\, K^{(i)}\, e^{\lambda_i t} = 0} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Uma vez que se trata de um circuito de segunda ordem, a matriz *A* é de (2x2), pelo que teremos para as componentes do vector próprio associado ao valor próprio λ_i:

Eq.77:

$$k_2^i = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}} k_1^i & se\ a_{12} \neq 0 \\ \dfrac{a_{21}}{\lambda_i - a_{22}} k_1^i & se\ \lambda_i \neq a_{22} \end{cases}$$

Como anteriormente, apenas se considera o caso de frequências naturais distintas, λ_1 e λ_2.

Vejam-se agora alguns casos particulares, em que se considera $C = 10\mu F$ e $L = 1\ mH$:

1.7.1.1.1 Frequências naturais reais distintas: $R = 40 > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, ou regime sobre-amortecido.

Utilizando $R = 40\Omega$, $C = 10\mu F$ e $L = 1mH$, teremos que $\lambda_1 = -2{,}68.10^3$ e $\lambda_2 = -3{,}732.10^4$, resultando (determinando os vectores próprios, equação 77) na seguinte solução homogénea:

Eq.78:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} h = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}0268 \end{bmatrix} e^{-2{,}68.10^3 t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}3731 \end{bmatrix} e^{-3{,}732.10^4 t}$$

Uma vez que, como se viu na equação 72, a solução particular é $\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} p = x_p(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, teremos para a solução total,

Eq.79:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}0774 \\ 0{,}0289 \end{bmatrix} e^{-2{,}68.10^3 t} + \begin{bmatrix} -0{,}0774 \\ -0{,}0289 \end{bmatrix} e^{-3{,}732.10^4 t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

supondo condições iniciais nulas e que se representa na figura 35, para t > 0.

1.7.1.1.2 Frequências naturais complexas conjugadas: $R = 4 < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, ou regime sub-amortecido.

A solução particular para a equação de estado mantém-se, havendo apenas que recalcular a solução homogénea. Utilizando $R = 4\Omega$, $C = 10\mu F$ e $L = 1mH$, teremos para as frequências naturais: $\lambda_1 = -2.10^3 + 9{,}798.10^3 j$ e $\lambda_2 = -2.10^3 - 9{,}798.10^3 j$. Daqui se determinam os vectores próprios, resultando na seguinte solução homogénea, equação 80:

Eq.80:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} h =$$

$$K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0,02 + j\ 0,098 \end{bmatrix} e^{(-2.10^3 + 9,798.10^3 j)\ t} + K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -0,02 - j\ 0,098 \end{bmatrix} e^{(-2.10^3 - 9,798.10^3 j)\ t}$$

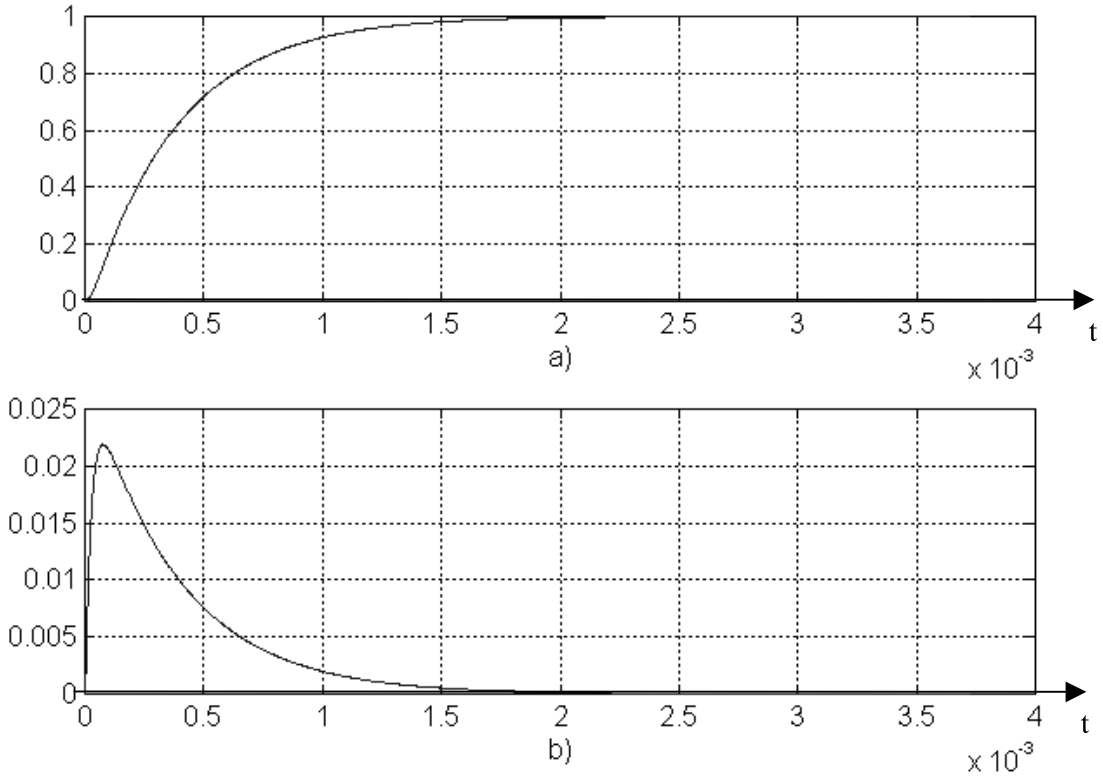


Figura 35 – Resposta ao escalão unitário (frequências naturais reais distintas):

a) tensão no condensador, $v_c(t)$ e b) corrente na bobina, $i_L(t)$.

E, finalmente, a solução total será dada por:

Eq.81:

$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,026\ cos(9,8.10^3 t + 2,94) \\ 0,051\ cos(9,8.10^3\ t - 1,57) \end{bmatrix} e^{-2.10^3\ t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e que se representa na figura 36.

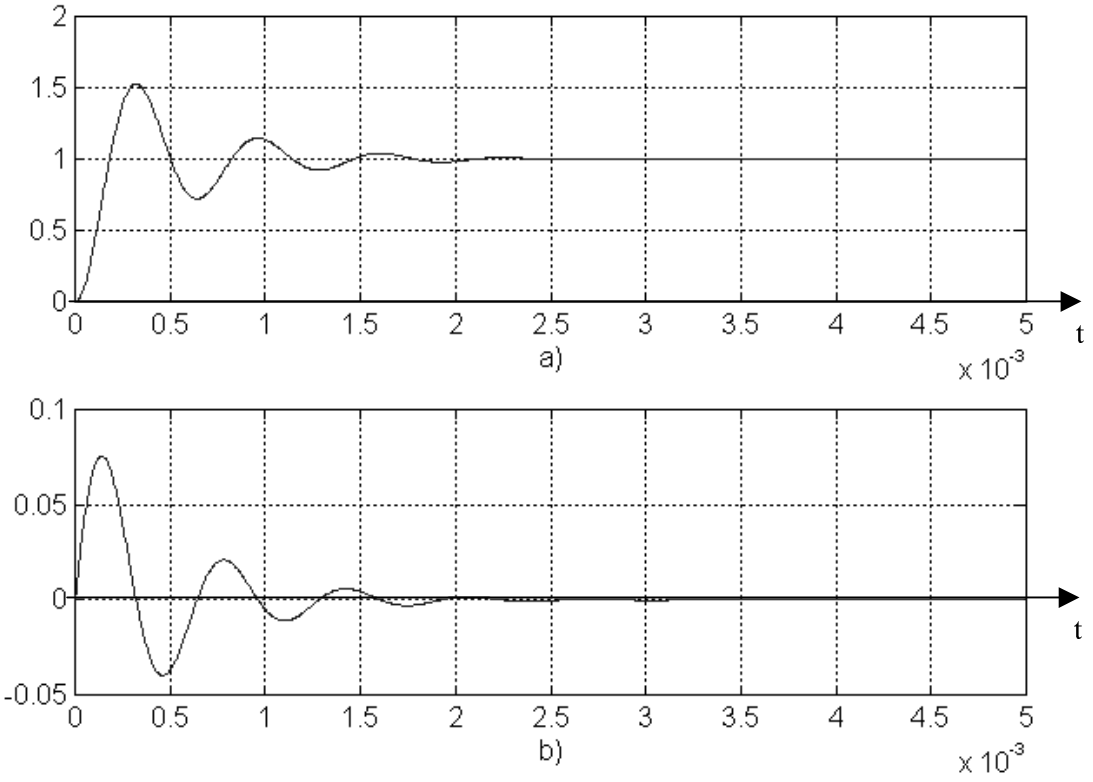


Figura 36 – Resposta ao escalão unitário (frequências naturais complexas conjugadas):

a) tensão no condensador, $v_c(t)$ e b) corrente na bobina, $i_L(t)$.

1.7.1.2 Entrada Sinusoidal ω < |max λ|; C.I. nula, $v_c(0^-) = 0$, regime sobre-amortecido.

Seja, neste caso, $v_s(t) = cos(1000t)$, para $t > 0$, $R = 40\Omega$, $C = 10\mu F$ e $L = 1mH$, pelo que teremos as seguintes frequências naturais: $\lambda_1 = -2{,}68.10^3$ e $\lambda_2 = -3{,}732.10^4$. Uma vez que a solução homogénea é já conhecida, apenas indicaremos a solução particular:

Eq.82:
$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 0{,}9365\ cos(1000\ t - 0{,}384) \\ 0{,}0094\ cos(1000\ t + 1{,}187) \end{bmatrix}$$

Admitindo condições iniciais nulas, teremos agora para a solução total (t > 0):

Eq.83:
$$\boxed{\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9456 \\ 0{,}0253 \end{bmatrix} e^{-2{,}68.10^3\ t} + \begin{bmatrix} 0{,}0773 \\ -0{,}0288 \end{bmatrix} e^{-3{,}732.10^4\ t} + \begin{bmatrix} 0{,}9365\ cos(1000\ t - 0{,}384) \\ 0{,}0094\ cos(1000\ t + 1{,}187) \end{bmatrix}}$$

apresentando-se o vector de estado na figura 37.

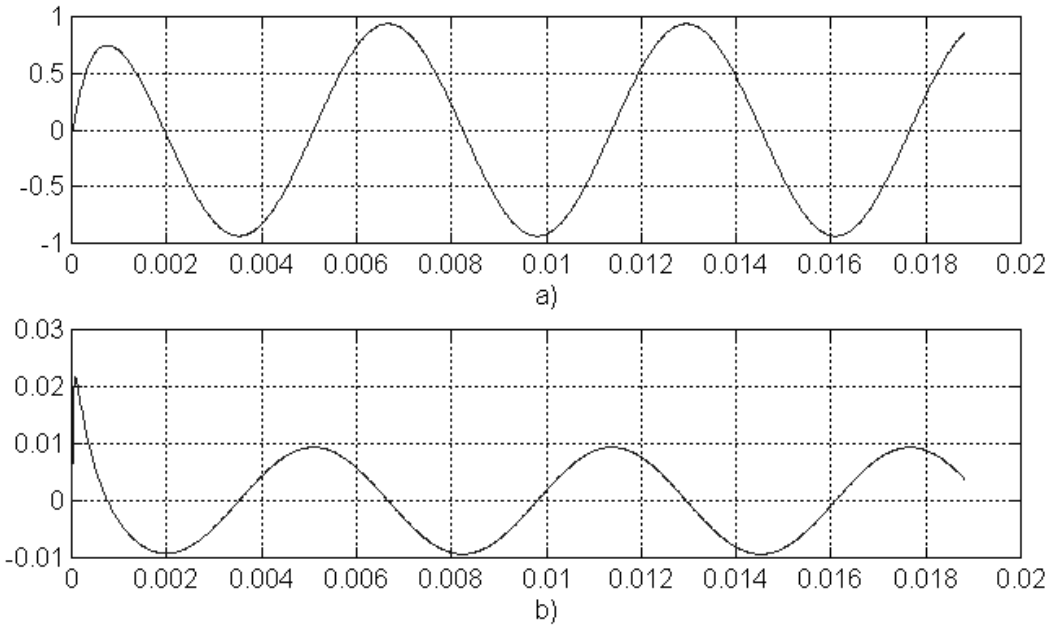


Figura 37 - Resposta a cos(1000t) para frequências naturais reais distintas:

a) tensão no condensador, $v_c(t)$ e b) corrente na bobina, $i_L(t)$.

1.7.1.3 Entrada Sinusoidal ω < |max λ|; C.I. nula, $v_c(0^-) = 0$, regime sub-amortecido.

Seja, neste caso, $v_s(t) = cos(1000t)$, para $t > 0$, $R = 4\Omega$, $C = 10\mu F$ e $L = 1mH$, pelo que teremos as seguintes frequências naturais: $\lambda_1 = -2.10^3 + 9,798.10^3 j$ e $\lambda_2 = -2.10^3 - 9,798.10^3 j$. Uma vez que a solução homogénea é já conhecida, apenas indicaremos a solução particular:

Eq.84:
$$\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 1,0093\ cos(1000\ t - 0,0484) \\ 0,0101\ cos(1000\ t + 1,530) \end{bmatrix}$$

Admitindo condições iniciais nulas, teremos agora para a solução total ($t > 0$):

Eq.85:
$$\boxed{\begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0085\ cos(9,798.10^3 t + 2,936) \\ -0,0004\ cos(9,798.10^3 t - 1,575) \end{bmatrix} e^{-2.10^3 t} + \begin{bmatrix} 1,0093\ cos(1000\ t - 0,0484) \\ 0,0101\ cos(1000\ t + 1,530) \end{bmatrix}}$$

apresentando-se o correspondente vector de estado na figura 38:

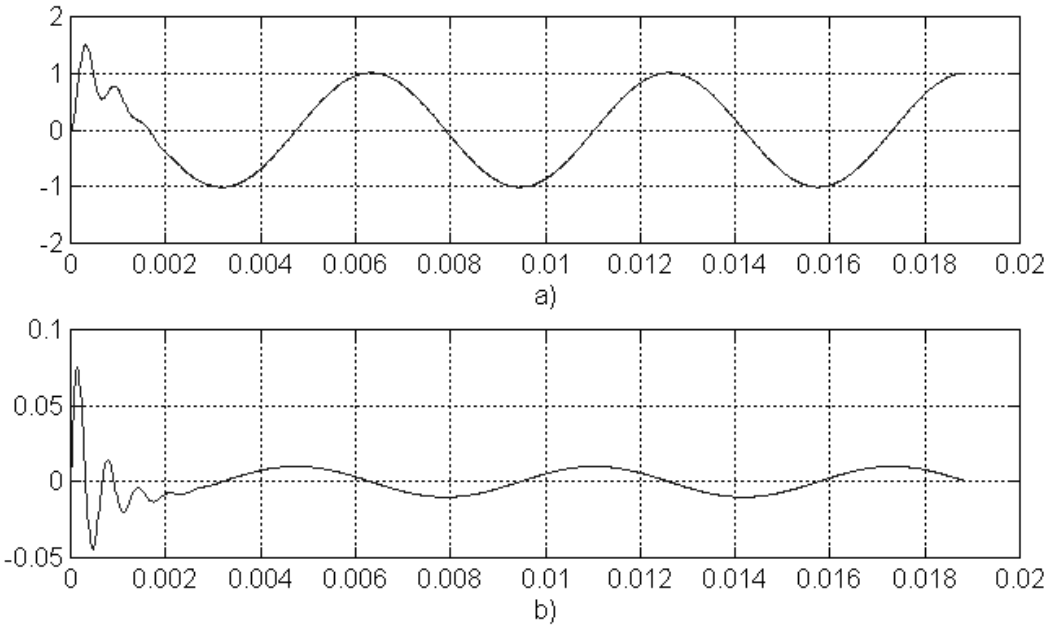


Figura 38 - Resposta a cos(1000t), para frequências naturais complexas conjugadas:

a) tensão no condensador, $v_c(t)$ e b) corrente na bobina, $i_L(t)$.

1.8 PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO

Sabendo que a equação de estado, sendo uma equação diferencial de 1ª ordem, linear de coeficientes constantes (ou um sistema de *n* equações diferenciais de 1ª ordem, etc.), quando sujeita a condições iniciais apresenta uma única solução, indicaremos de seguida algumas das suas propriedades mais relevantes. Por forma a simplificar a notação a utilizar, atente-se na seguinte convenção:

- o vector *E* representa a excitação (fontes ou geradores ligados ao circuito);
- o vector *R* representa a solução total da equação de estado;
- o vector *I* representa o vector de estado no instante inicial;

Assim, e seguindo a notação apresentada, a equação 86:

Eq.86: $$E, I \rightarrow R$$

representa a resposta *R* obtida pela excitação *E* e imposição de condições iniciais *I*. Desta forma, $E_1, I_1 \rightarrow R_1$ se representa um caso particular da equação 86, obtida para novos vectores de excitação e estado iniciais.

1.8.1 TEOREMA GERAL DA SOBREPOSIÇÃO[9]

Se $E_1, I_1 \rightarrow R_1$ e se $E_2, I_2 \rightarrow R_2$, então ter-se- á, para α e β constantes:

$$E_3 = \alpha E_1 + \beta E_2, I_3 = \alpha I_1 + \beta I_2 \rightarrow R_3 = \alpha R_1 + \beta R_2$$

Deste teorema poderemos tirar ainda as seguintes propriedades:

1.8.2 SOBREPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO E DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Se $E_1, 0 \rightarrow R_1$ e se $0, I_2 \rightarrow R_2$, então ter-se- á:

$$E_1, I_2 \rightarrow R_1 + R_2$$

1.8.3 SOBREPOSIÇÃO DE EXCITAÇÕES PARA CONDIÇÕES INICIAIS NULAS

Se $E_1, 0 \rightarrow R_1$ e se $E_2, 0 \rightarrow R_2$, então ter-se-á:

$$E_3 = E_1 + E_2, 0 \rightarrow R_3 = R_1 + R_2$$

1.8.4 SOBREPOSIÇÃO DE CONDIÇÕES INICIAIS PARA EXCITAÇÃO NULA

Se $0, I_1 \rightarrow R_1$ e se $0, I_2 \rightarrow R_2$, então ter-se- á, para α e β constantes:

$$0, I_3 = \alpha I_1 + \beta I_2 \rightarrow R_3 = \alpha R_1 + \beta R_2$$

1.8.5 PARTE REAL

$$Re\{E\}, Re\{I\} \rightarrow Re\{R\}$$

e, sendo I real,

$$Re\{E\}, Re\{I\} \rightarrow Re\{R\}$$

1.8.6 INVARIÂNCIA TEMPORAL

Considerando o circuto em repouso inicial, *IR*, teremos, explicitando a dependência temporal:

$$E(t), IR \rightarrow R(t)$$

Efectuando uma translação de δ unidades de tempo,

$$E(t - \delta), IR \rightarrow R(t - \delta)$$

---

[9] Deixaremos a demonstração deste teorema para Apêndice.

1.8.7 DIFERENCIAÇÃO

Considerando o circuto em repouso inicial, *IR*, teremos,

$E(t),\ IR \rightarrow R(t)$

$\frac{d\,E(t)}{dt},\ IR \rightarrow \frac{d\,R(t)}{dt}$

tendo-se usado a seguinte notação, considerando-se o vector $Y = [y_1, y_2, ..., y_n]^T$:

$$\frac{d\,Y(t)}{dt} = [\frac{d\,y_1(t)}{dt}, \frac{d\,y_2(t)}{dt}, ..., \frac{d\,y_n(t)}{dt}]^T$$

1.8.8 INTEGRAÇÃO

Considerando o circuto em repouso inicial, *IR*, teremos,

$E(t),\ IR \rightarrow R(t)$

$$\int_{-\infty}^{t} E(\tau)\,d\tau,\ IR \rightarrow \int_{-\infty}^{t} R(\tau)\,d\tau$$

tendo-se usado a seguinte notação, considerando-se o vector $Y = [y_1, y_2, ..., y_n]^T$:

$$\int_{-\infty}^{t} Y(\tau)\,d\tau = [\int_{-\infty}^{t} y_1(\tau)\,d\tau,\ \int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)\,d\tau,\ ...,\ \int_{-\infty}^{t} y_n(\tau)\,d\tau]^T$$

1.8.9 RAÍZES MÚLTIPLAS

A ocorrência de raízes múltiplas na equação característica foi ignorada em 1.4.2, equação 28, e ainda nos exemplos apresentados. Esta ocorrência levanta alguns problemas e, mencionaremos apenas o caso em que duas raízes são idênticas ($\lambda_1 = \lambda_2$) e ainda que na equação 26 apenas uma das equações é linearmente dependentes das outras *n-1* equações. Neste caso, a solução homogénea será dada por

Eq.87:
$$x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} x_h^{(i)}(t) \Rightarrow \boxed{x_h(t) = \sum_{i=2}^{n} K^{(i)} e^{\lambda_i t} + K' t\, e^{\lambda_2 t}}$$

em que a constante K' se determina resolvendo o sistema de equações:

Eq.88:
$$[\lambda_2 I - A]\, K' + K_2 = 0$$

1.9 CIRCUITOS DINÂMICOS TIPO B

Neste parágrafo apenas será analisado um circuito dinâmico do tipo B, nomeadamente o que se representa na figura 39. A título de exemplo, refira-se a sua utilidade nas sondas atenuadoras para osciloscópios de raios catódicos[10]. Uma vez que a definição de circuito tipo B foi já apresentada em 1.2, passar-se-á de imediato à formulação da equação de estado.

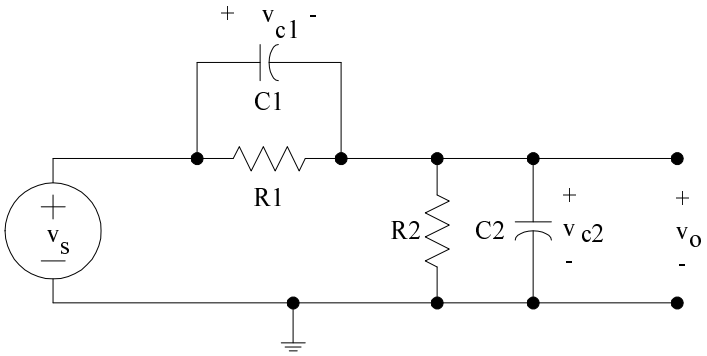


Figura 39 - Circuito tipo B.

1.9.1 FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO

A lei de Kirchhoff das tensões aplicadas na malha composta pelo gerador independente de tensão e pelos dois condensadores, traduz-se numa dependência linear nas tensões v_{c1}, v_{c2} e v_s. Tal facto leva a que haja uma única variável de estado no circuito da figura 39, podendo ser, indiferentemente, v_{c1} ou v_{c2}. Para que a equação de saída seja mais facilmente obtida ($v_o = v_{c2}$), optaremos por escolher a tensão v_{c2} para variável de estado. Desta forma, procure-se i_{c2}:

Eq.89:
$$i_{c2} = i_{c1} + \frac{1}{R_1} v_{c1} - \frac{1}{R_2} v_{c2}$$

Uma vez que $i_{c1} = C_1 \frac{dv_{c1}}{dt}$ e que $v_{c1} = v_s - v_{c2}$, teremos finalmente:

Eq.90:
$$\boxed{\frac{dv_{c2}(t)}{dt} = -\frac{1}{C_1 + C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_{c2}(t) + \frac{1}{R_1(C_1 + C_2)} v_s(t) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{d\, v_s(t)}{dt}}$$

---

[10] Concretamente, e na generalidade, a «sonda atenuadora» é constituída por R_1 e C_1, sendo R_2 e C_2, respectivamente, a resistência e a capacidade de entrada; v_s e v_o representam as tensões de entrada e saída, ou seja, v_s a tensão que se pretende «medir» e v_o é a tensão aos terminais de entrada do osciloscópio.

A equação 90 apresenta, face à equação de estado para circuitos do tipo A um termo adicional na derivada da tensão do gerador independente. No caso geral teremos

Eq.91:
$$\boxed{\frac{d\,x(t)}{dt} = a\,x(t) + b\,u(t) + f\,\frac{d\,u(t)}{dt}}$$

considerando $x(t)$ como sendo a variável de estado e $u(t)$ como (combinação linear dos) gerador(es) de tensão/corrente.

A extensão para circuitos do tipo B com mais de uma variável de estado é imediata:

Eq.92:
$$\boxed{\frac{d\,x(t)}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t) + F\,\frac{d\,u(t)}{dt}}$$

1.9.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO

A inclusão do termo correspondente a $\frac{d\,u(t)}{dt}$ (equações 91 e 92) irá ter como principal consequência a não continuidade da variável de estado! Concretamente, e para o circuito da figura 39, a partir da dependência $v_S = v_{c1} + v_{c2}$ se verifica que, quando v_S apresentar descontinuidades, então v_{c1} e v_{c2} também as apresentarão.

Sabendo, da Teoria das Distribuições que $\delta(t) = \frac{d\,h(t)}{dt}$, sendo $h(t)$ a função de Heaviside, poderíamos tentar analisar a solução da equação de estado quando esta comporta impulsos $\delta(t)$ [11]. No entanto, por se tratar, nesta fase, de um tópico avançado, optaremos por um método alternativo que não faça recurso às funções generalizadas.

1.9.2.1 Solução particular

Limitemo-nos ao caso em que o termo independente $u(t)$ apresenta uma única descontinuidade finita em $t = 0$:

- $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U & t > 0 \end{cases}$
- $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U\,e^{st} & t > 0 \end{cases}$

No primeiro caso, uma vez que, para $t > 0$, $u(t) = U$, poderemos imediatamente apresentar a solução particular para $x(t)$ que será:

---

[11] $\delta(t)$ é o denominado impulso de Dirac.

Eq.93: $$\boxed{x_p(t) = -\frac{b}{a} U}$$

no caso univariável e, no caso multivariável,

Eq.94: $$\boxed{x_p(t) = (-A)^{-1} B U}$$

enquanto que, para o segundo caso teremos:

Eq.95: $$\boxed{x_p(t) = \frac{f s + b}{s - a} U e^{st}}$$

para o caso univariável e:

Eq.96: $$\boxed{x_p(t) = (s I - A)^{-1} (B + sF) U e^{st}}$$

para o caso multivariável.

1.9.2.2 Solução homogénea

Sendo esta solução determinada com os termos independentes nulos, a solução homogénea assume (supondo frequências naturais distintas) a forma já conhecida da equação 28, $x_h(t) = k e^{\lambda t}$ com $\lambda = a$ (caso univariável) e $x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} K^{(i)} e^{\lambda_i t}$ no caso multivariável.

1.9.2.3 Solução Total e Determinação das Constantes da Solução Homogénea

A questão é, agora, a determinação das constantes k (caso univariável) ou $K^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$ (caso multivariável) uma vez que deixa de haver continuidade da variável de estado quando $u(t)$ apresentar uma descontinuidade. A solução é, efectivamente, permitir que $x(t)$ seja uma função descontínua, contrabalançando assim (do lado esquerdo da equação de estado, equação 91) o termo correspondente à derivada da excitação $\frac{d\,u(t)}{dt}$ que ocorre no lado direito da mesma equação, ou seja

Eq.97: $$\boxed{x(0^+) = x(0^-) + \Delta}$$

Assim, apenas nos resta determinar o valor de Δ para procedermos à obtenção da amplitude k da solução homogéna. Por inspecção da equação 91, teremos

Eq.98: $$\boxed{\Delta = f}$$

Exemplifiquemos este caso com o problema do circuito da figura 39. Comecemos por considerar que R_2 = 1 MΩ, C_2 = 27pF. O factor de atenuação usual nestas sondas é de 10:1 pelo que R_1 = 9MΩ por forma a que R_1 e R_2 constituam um divisor potenciométrico da tensão v_s. Suponha-se ainda que C_1 = 6 pF. Assim, a equação 90 será:

Eq.99:
$$\frac{dv_{c2}(t)}{dt} = -\frac{10^6}{33} v_{c2}(t) + \frac{10^6}{330} v_s(t) + \frac{2}{11} \frac{d\, v_s(t)}{dt}$$

Supondo que $v_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ e que o circuito se encontrava inicialmente em repouso, implicando que $v_{c2}(0^-) = 0$, teremos usando a equações 97 e 98 que $v_{c2}(0^+) = \frac{2}{11}$.

A partir das equações 28 e 93, obtêm-se imediatamente para a tensão em C_2:

Eq.100:
$$v_{c2}(t) = k\, e^{-\frac{10^6}{33} t} + 0{,}1$$

e, impondo $v_{c2}(0^+) = \frac{2}{11}$ nesta equação, teremos $k = 0{,}0818$, pelo que a solução final é:

Eq.101:
$$v_{c2}(t) = 0{,}0818\, e^{-\frac{10^6}{33} t} + 0{,}1$$

e que se apresenta na figura 40 e que, como se pode verificar, v_{c2} não é uma réplica (atenuada) da tensão de entrada v_s.

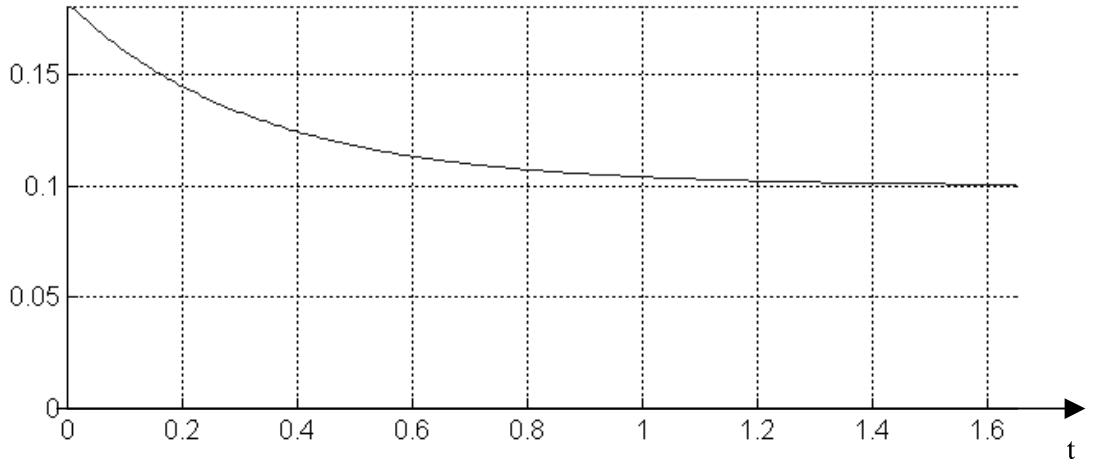


Figura 40 - Tensão v_{c2} para uma entrada escalão unitário (t em 10ms) e C_1 = 6pF.

Uma vez que este circuito se destina a obter uma versão atenuada da tensão de entrada, há que dimensionar correctamente a constante de tempo $\tau_1 = R_1 C_1$.

Utilizando agora uma capacidade C_1 de valor inferior, C_1 = 2 pF, teremos para a equação de estado:

Eq.102: $$\frac{dv_{c2}(t)}{dt} = -\frac{10^7}{261} v_{c2}(t) + \frac{10^6}{261} v_s(t) + \frac{2}{29} \frac{d v_s(t)}{dt}$$

a que corresponderá uma solução $v_{c2}(t)$, continuando a admitir condições iniciais nulas:

Eq.103: $$v_{c2}(t) = -0{,}031\, e^{-\frac{10^7}{261} t} + 0{,}1$$

representada na figura 41.

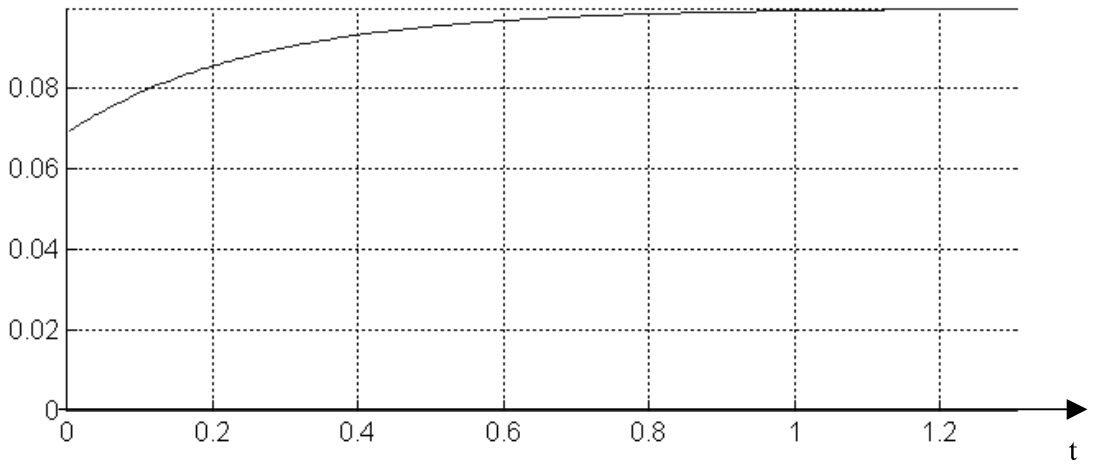


Figura 41 - Tensão v_{c2} para uma entrada escalão unitário (t em 10ms) e C_1 = 2pF.

As figuras 40 e 41 (respeitantes às equações 101 e 103) correspondem a ter-se, respectivamente, $\tau_1 = R_1 C_1 > \tau_2 = R_2 C_2$ e $\tau_1 = R_1 C_1 < \tau_2 = R_2 C_2$. Estes resultados «sugerem» que, fazendo $\tau_1 = \tau_2$, se obteria em $v_{c2}(t)$ a réplica atenuada da tensão do gerador. De facto, fazendo $C_1 = \frac{C_2}{9} = 3pF$ (note-se que $R_1 = 9\, R_2$)

Utilizemos a notação apresentada em 1.8, em que, sendo o vector E a excitação (fontes ou geradores ligados ao circuito); sendo o vector R a solução total da equação de estado; sendo o vector I o vector de estado no instante inicial, $E,\ I \rightarrow R$ representa a resposta do circuito a condições iniciais I e excitação E.

Teremos, neste caso, para equação de estado:

Eq.104: $$\frac{dv_{c2}(t)}{dt} = -\frac{10^6}{27} v_{c2}(t) + \frac{10^6}{270} v_s(t) + \frac{1}{10} \frac{d v_s(t)}{dt}$$

a que corresponderá a solução

Eq.105: $$v_{c2}(t) = 0{,}1$$

que, como pretendido, é um décimo da tensão de entrada.