Introdução ao estudo da resposta de Circuitos Lineares, Invariantes, Dinâmicos e de Parâmetros Concentrados a entradas sinusoidais

Regime Forçado Sinusoidal

Análise de Circuitos

por

António Joaquim Serralheiro

Dezembro de 1999

2. REGIME FORÇADO SINUSOIDAL

2.1 INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações práticas apenas importa o estudo do comportamento forçado dos circuitos, isto é, depois dos transitórios iniciais se terem anulado. Do ponto de vista da análise da resposta temporal (usando, por exemplo, o modelo de estado), tal corresponde a ignorar a resposta natural ou, melhor, a «esperar» que esta se torne desprezável face à resposta forçada (solução particular).

Limitaremos o estudo da resposta de circuitos lineares a entradas sinusoidais cuja aplicação aos circuitos em análise se considera ter ocorrido «no passado longínquo». Desta forma, se garante a não existência de transitórios na resposta do circuito.

O estudo do regime forçado sinusoidal tem, ainda, uma importante aplicação que diz respeito ao estudo do comportamento dos circuitos no domínio da frequência.

2.2 CONCEITO DE IMPEDÂNCIA

2.2.1 IMPEDÂNCIA DO CONDENSADOR

Consideremos agora o circuito RC da figura 1, em que o gerador de tensão é caracaterizado pela expressão $v_S(t) = V_S\, e^{j\omega t}$.

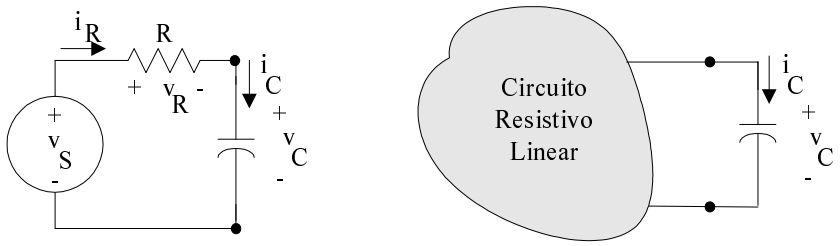

Figura 1: Circuito RC passa-baixo.

O gerador de tensão v_S em série com a resistência R pode ser encarado como o equivalente de Thévenin de um qualquer circuito linear ligado aos terminais do condensador, pelo que, deste modo, não estamos a limitar esta análise a um dado circuito eléctrico em particular.

Da figura 1 vê-se que a corrente do condensador é, também, a corrente na resistência R, pelo que $i_C = \frac{v_S - v_C}{R}$. Como a relação tensão-corrente num condensador é dada por $i_C(t) = \frac{d\,v_C(t)}{dt}$, imponha-se naquela equação a característica tensão-corrente do condensador, chegando-se de imediato a:

Eq.1: $$\frac{d\,v_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}\,v_C(t) + \frac{1}{RC}\,v_S(t)$$

Sendo, por hipótese, $v_S(t) = V_S\, e^{j\omega t}$, tem-se[1] que a solução (particular) para a equação 1 é dada por $v_C(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC}\,V_S\, e^{j\omega t}$. Desta equação se vê que, sendo ω a frequência (em radiano/s) do gerador de entrada, então ω é também a frequência da tensão aos terminais do condensador[2] e que, sendo V_S a amplitude da tensão de entrada, teremos que a amplitude (complexa) da tensão aos terminais do condensador é $V_C = \frac{1}{1 + j\omega RC}\,V_S$. Desta forma, $v_C(t) = V_C\, e^{j\omega t}$ e ainda $i_C(t) = j\omega C\ V_C\, e^{j\omega t}$ ou seja, $i_C(t) = I_C\, e^{j\omega t}$ em que a amplitude (complexa) da corrente no condensador é $I_C = j\omega C\ V_C$. A relação entre as amplitudes complexas da tensão e da corrente é, no condensador, $\frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C}$. A este quociente se dá a designação de <u>impedância</u>. Assim, a impedância Z_C do condensador é:

Eq.2: $$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

2.2.2 IMPEDÂNCIAS DA RESISTÊNCIA E DA BOBINA

Sendo, em valores instantâneos, a tensão aos terminais de uma resistência dada por $v_R(t) = V_R\, e^{j\omega t}$ e, por sua vez, a corrente no mesmo instante de tempo $i_R(t) = I_R\, e^{j\omega t}$, então, e como pela lei de Ohm $v_R(t) = i_R(t)$, teremos, nas amplitudes complexas, $V_R = R\, I_R$. Ou seja, a impedância da resistência é:

Eq.3: $$Z_R = R$$

---

[1] Este resultado já foi obtido anteriormente (Modelo de Estado) e não é mais do que a solução particular da equação diferencial a uma exponencial complexa.

[2] Ou seja, a exponencial complexa é uma função própria para sistemas ou circuitos caracterizados por equações diferenciais lineares e de coeficientes constantes no tempo.

Consideremos agora o circuito da figura 2 em que se inclui uma bobina, cuja relação entre a tensão e a corrente é $v_L(t) = \frac{d\, i_L(t)}{dt}$. Por um raciocínio idêntico ao desenvolvido para o circuito da figura 1 e, atendendo à dualidade, teremos que $i_L(t) = I_L\, e^{j\omega t}$ uma vez que se admite um gerador de corrente $i_s(t) = I_s\, e^{j\omega t}$. Poderemos também, obter a amplitude complexa da corrente na bobina em função da amplitude da corrente do gerador independente: $I_L = \frac{R}{R + j\omega L}\, I_s$. A partir da característica corrente-tensão da bobina se obtém $v_L(t) = j\omega\, L\, I_L\, e^{j\omega t} = V_L\, e^{j\omega t}$, sendo V_L a amplitude complexa da tensão aos terminais da bobina.

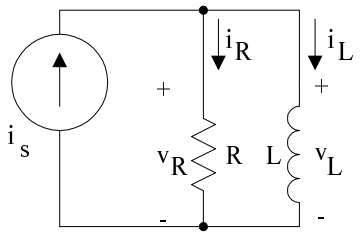

Figura 2: Circuito RL.

Deste último resultado se verifica imediatamente que a impedância da bobina é:

Eq.4: $Z_L = j\omega L$

Resumindo, na tabela I assinalam-se as impedâncias dos elementos resistência, condensador e bobina, bem como as respectivas admitâncias[3].

Tabela I: Características tensão-corrente, Impedâncias e Admitâncias.

Elemento	Característica Tensão—Corrente	Impedância $Z = \frac{V}{I}$	Admitância $Y = \frac{I}{V}$
Resistência	$v(t) = R\, i(t)$	R	$\frac{1}{R} = G$
Condensador	$i(t) = C\frac{d\, v(t)}{dt}$	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
Bobina	$v(t) = L\frac{d\, i(t)}{dt}$	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

[3] A admitância Y é, por definição, o quociente das amplitudes complexas da corrente e da tensão, ou seja, não é mais do que o inverso da impedância: $Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z}$.

Portanto, as impedâncias e as admitâncias resultam em relações algébricas entre as amplitudes das tensões e correntes nos elementos dinâmicos, evitando o recurso às suas derivadas temporais. Desta forma, as equações de equilíbrio que, para este tipo de circuitos, são equações diferenciais, «transformam-se» em equações algébricas, como se verá no parágrafo seguinte.

2.2.3 DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA FORÇADA (REGIME PERMANENTE SINUSOIDAL)

Retomando o problema da figura 1, e tendo que as correntes nos ramos da resitência e do condensador são, efectivamente, idênticas, $i_R = i_C$, então, $i_R(t) = I_R\, e^{j\omega t}$ pelo que $v_R(t) = V_R\, e^{j\omega t}$ em que a amplitude da tensão na resistência se relaciona com a amplitude da corrente através de $V_R = R\, I_R$. Deste resultado, facilmente se verifica que todas as variáveis no circuito (tensões e correntes) apresentam dois termos: uma amplitude complexa (V ou I) multiplicada pela exponencial complexa de pulsação ω, ou seja $v_k(t) = V_k\, e^{j\omega t}$ e $i_k(t) = I_k\, e^{j\omega t}$.

Assim, a lei de Kirchhoff das tensões, aplicada à malha do circuito da figura 1, resulta em $-v_S(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$. Pelo exposto atrás, esta equação pode agora ser reescrita na forma $-V_S\, e^{j\omega t} + V_R\, e^{j\omega t} + V_C\, e^{j\omega t} = 0$ ou ainda, eliminando o termo da exponencial complexa (e, consequentemente, da dependência temporal), na forma $-V_S + V_R + V_C = 0$.

Este facto mostra que é agora possível escrever as equações de equilíbrio do circuito, não apenas nos valores instantâneos das tensões e/ou correntes, mas ainda nas suas amplitudes complexas. Para tal, o circuito original (figura 1) é redesenhado por forma a que os ramos da resistência e do condensador sejam substituídos por elementos eléctricos que exibam as respectivas impedâncias, $Z_R = R$ e $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, respectivamente; por outro lado, o gerador de tensão é caracterizado pela sua amplitude complexa (figura 3).

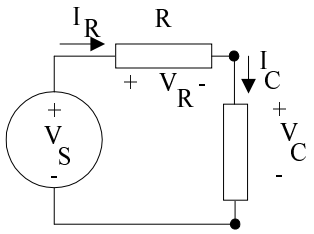

Figura 3: Circuito RC Passa-Baixo.

Escrevendo, no circuito da figura 3, a equação resultante da lei de Kirchhoff das tensões em termos da tensão aos terminais do condensador, $V_C = V_S - V_R = V_S - R\, I_C$. Sendo a corrente no

condensador dada por $I_C = j\omega C V_C$, imediatamente se obtém a seguinte relação entre as amplitudes complexas das tensões no condensador e na fonte de tensão:

Eq.5: $V_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_S$

o que, sendo $v_C(t) = V_C e^{j\omega t}$ resulta em

Eq.6: $v_C(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_S e^{j\omega t}$

As equações 5 e 6 poderiam ter sido obtidas de imediato se fosse utilizado o conceito do «divisor de tensão» só que, neste caso, a tensão do gerador é «dividida» pelas impedâncias dos ramos em vez de ser nas resistências de um circuito resistivo.

Sendo, em aplicações práticas, corrente o uso de fontes sinusoidais, há que modificar convenientemente o método apresentado. Assim, seja o gerador independente, uma função cosseno de amplitude V Volt, desfasagem θ radianos e frequência angular ω rad/s, isto é, $v_S(t) = V\ cos(\omega\ t + \theta)$. Reescrevendo $v_S(t)$ por forma a utilizar a exponencial complexa, teremos:

Eq.7: $v_S(t) = V cos(\omega t + \theta) = Re\{ V e^{j(\omega t + \theta)}\} = Re\{V_S e^{j\omega t}\}$

em que $V_S = V e^{j\theta}$ é a amplitude complexa da tensão de entrada. Recordemos que a parte real de um complexo Z é dada por $Re\{Z\} = \frac{1}{2} Z + \frac{1}{2} Z^*$ em que Z^* é o conjugado do complexo Z. Ou seja, uma vez que a função cosseno do gerador de entrada não é mais do que a soma de duas fontes exponenciais complexas $v_S(t) = \frac{1}{2}\ v_1(t) + \frac{1}{2}\ v_2(t)$ em que $v_1(t) = V_S\ e^{j\omega t}$ e $v_2(t) = V_S^*\ e^{-j\omega t}$ e, como se trata de um circuito linear, poderemos aplicar o teorema da sobreposição:

- para a entrada $v_1(t) = V_S e^{j\omega t}$ a saída é $v_{1C}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_S e^{j\omega t}$;
- para a entrada $v_2(t) = V_S^* e^{-j\omega t}$ a saída é agora $v_{2C}(t) = \frac{1}{1 - j\omega RC} V_S^* e^{-j\omega t}$;
- para uma entrada $v_S(t) = \frac{1}{2} v_1(t) + \frac{1}{2} v_2(t) = Re\{V_S e^{j\omega t}\}$ a saída será finalmente

Eq.8: $v_C(t) = \frac{1}{2} v_{1C} + \frac{1}{2} v_{2C} = Re\{\frac{1}{1 + j\omega RC} V_S e^{j\omega t}\}$

Manipulando um pouco a equação 8, chega-se ao seguinte resultado para a tensão aos terminais do condensador:

$$Eq.9:\ v_C(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} V \cos(\omega t + \theta - arctg(\omega RC))$$

Esta equação pode ser interpretada como se segue:

- À entrada cosseno de amplitude V, frequência angular ω, o circuito «responde»
  - com uma amplitude V multiplicada pelo factor $\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ que, como se verifica, depende da frequência ω da tensão de entrada;
  - a frequência da tensão de saída é ω, ou seja, é idêntica à do sinal de entrada pois trata-se se um circuito linear;
  - a tensão no condensador apresenta uma desfasagem adicional dada por $- arctg(\omega RC)$ e que também depende da frequência do sinal de entrada.

Caso a entrada fosse $v_S(t) = V \, sen(\omega t + \theta)$ seria imediato, pelo exposto, obter para a tensão no condensador: $v_C(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} V \, sen(\omega t + \theta - arctg(\omega RC))$.

2.3 Funções de Transferência, de Resposta em Frequência e Diagrama de Pólos-Zeros

Dos parágrafos anteriores se depreende que, usando impedâncias na obtenção das equações de equilíbrio, resultam equações algébricas nas amplitudes complexas das correntes e tensões. Estas equações podem, com facilidade, ser manipuladas por forma a se ter uma relação entre a variável de entrada e a variável de saída.

Concretamente, no caso do circuito que temos vindo a tratar, obteve-se $V_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_S$ ou seja, a (amplitude) da tensão no condensador vem dada por $V_C = G(j\omega) \, V_S$ sendo

$$Eq.10:\ G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Ao quociente das amplitudes das variáveis de saída e de entrada (em função da frequência ω) e que no caso em estudo são, respectivamente, as tensões no condensador e no gerador de entrada, dá-se o nome de Função de Resposta em Frequência: $G(j\omega) = \frac{V_C}{V_s}$.

No caso mais geral em que o gerador de entrada é caracterizado por uma amplitude V multiplicada pela exponencial complexa $e^{s\,t}$ com $s = \sigma + j\,\omega$, teremos que a solução particular da equação 1 será agora: $V_C(t) = \frac{1}{1+s\,RC}\,V\,e^{s\,t}$. Seguindo um processo em tudo semelhante ao anteriormente utilizado, poderemos relacionar as amplitudes complexas das variáveis de entrada e de saída na forma $V_C = G(s)\;V_s$, sendo $G(s)$ designada por Função de Transferência.

Portanto, a função de transferência deste circuito, considerando que a sua saída é a tensão aos terminais do condensador, é:

$$Eq.11:\quad G(s) = \frac{1}{1+s\,RC}$$

Assim, se particularizarmos na resposta do circuito a excitação por forma a ter amortecimento nulo ($\sigma = 0$), a função de transferência corresponderá à função de resposta em frequência [4].

Relativamente ao conceito de impedância, o uso da exponencial $e^{s\,t}$ em vez de $e^{j\,\omega\,t}$ traduz-se apenas nos seguintes resultados:

$$Z_R = R\;;\; Z_C = \frac{1}{sC}\;\text{ e }\;Z_L = sL$$

para, respectivamente, as impedâncias da resistência, condensador e bobina.

No caso geral, em que os circuitos eléctricos são constituídos por elementos lineares e invariantes no tempo, a função de transferência assume a forma de um quociente de dois polinómios, $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ na variável s. Às raízes do polinómio numerador dá-se o nome de zeros da função de transferência e às raízes do polinómio denominador o nome de pólos da função de transferência. Como se depreende, a função de transferência é não-analítica sempre que a variável s for igual a um pólo. A importância dos pólos e dos zeros no estudo da resposta em frequência será mais adiante realçada.

---

[4] Na realidade esta questão é mais complexa: poderemos afirmar que, em termos gerais, a função de transferência presta-se ao estudo dos regimes natural e forçado, ao passo que a função de resposta em frequência presta-se essencialmente ao estudo do regime forçado.

Designado os pólos por p_i e os zeros por z_i de *G(s)*, poderemos obter *G(s)* na seguinte forma:

$$Eq.12:\ G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=0}^{m} s - z_i}{\prod_{k=0}^{n} s - p_i}$$

A cada um dos termos $s - p_i$ ou $s - z_i$, $i = 1, 2, ..., m,..., n$ poderemos associar um vector cujo afixo se encontra em *s* e de origem em p_i ou z_i , respectivamente. Assim, a função de transferência pode ser entendida como resultando de operações binárias (produtos e quocientes) entre vectores para cada valor da variável *s*. Uma vez que o estudo da resposta em frequência equivale a considerar a variável *s* como sendo imaginária pura, $s = j\omega$, não teremos mais do que considerar o afixo dos vectores em causa situados sobre o eixo imaginário. Representando, no plano *s* os pólos por × e os zeros por O, obteremos o denominado diagrama de pólos-zeros. A título de exemplo, seja $G(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 10\,s + 21}$ uma função de transferência que apresenta um zero em $s = -5$ e dois pólos, respectivamente em $s = -3$ e $s = -7$: $G(s) = \frac{s + 5}{(s + 3)\,(s + 7)}$ e cujo diagrama de pólos-zeros se apresenta na figura 4.

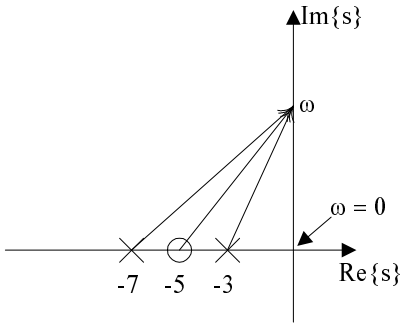

Figura 4: Diagrama de pólos-zeros de $G(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 10\,s + 21}$

Começando com $\omega = 0$, e estando os três vectores horizontais, é muito fácil a determinação do módulo da função de resposta em frequência: $|\ G(j\omega)\ | = \frac{5}{3 \cdot 7} = \frac{5}{21}$. Ou seja, no numerador teremos o módulo do vector que parte de s = -5 (zero) para $s = j\omega = 0$ (origem dos eixos) e no denominador, o produto dos módulos dos dois vectores que partem dos pólos *(s = -3 e s = -7)* para a origem. Poderemos ainda determinar o argumento de $G(j\omega)$ que é, neste caso, nulo: verifiquemos que os três vectores em causa formam ângulos nulos com $Im\{s\} = 0$. Com o aumento da frequência, os módulos dos vectores aumentam por forma a que, sendo ω suficientemente grande,

o módulo da função de resposta em frequência é praticamente nulo. Efectivamente, $|G(j\omega)| \to 0$ com $\frac{1}{\omega}$. Ainda, para ω suficientemente grande (altas frequências), os vectores encontram-se praticamente verticais, pelo que o argumento da função de resposta em frequência, $\angle G(j\omega)$ será de, aproximadamente, $-\frac{\pi}{2}$. É bastante fácil a verificação deste resultado: o argumento de um produto de números complexos não é mais do que a soma dos argumentos dos complexos envolvidos, $\angle G(j\omega) = \angle(j\omega + 5) - [\angle(j\omega + 3) + \angle(j\omega + 7)]$. Assim, para $\omega \to \infty$, $\angle G(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$. Para uma análise mais elaborada da resposta em frequência seria necessário obter G(jω) para outros valores da frequência, nomeadamente na «vizinhança» das frequências do zero e dos pólos.

3. RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

O estudo da resposta em frequência de um dado circuito linear é grandemente facilitado quando se conhece a sua função de resposta em frequência $G(j\omega)$ ou, em alternativa, a sua função de transferência $G(s)$. Qualquer uma destas funções pode ser obtida directamente por análise do circuito usando impedâncias ou através do modelo de estado. Este último caso será abordado no final deste capítulo.

A título exemplificativo, considere-se a função de transferência $G(s) = \frac{1}{s+1}$, a que corresponde a função de resposta em frequência $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$; que como se sabe, pode ser obtida através das seguintes expressões:

Eq.13: $G(j\omega) = Re\{G(j\omega)\} + j\, Im\{G(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2}$

ou ainda

Eq.14: $G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\angle G(j\omega)}$

em que $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ e $\angle G(j\omega) = -arc\,tg(\omega)$.

A representação gráfica da equação 13 pode revestir várias formas, nomeadamente:

- $Re\{G(j\omega)\}$ em função de ω e $Im\{G(j\omega)\}$ em função de ω (figura 5);
- $Im\{G(j\omega)\}$ em função de $Re\{G(j\omega)\}$ (figura 6);

enquanto que, para a equação 14 será:

- $\angle G(j\omega)$ em função de $|G(j\omega)|$ (figura 7);
- $|G(j\omega)|$ em função de ω e $\angle G(j\omega)$ em função de ω (figura 8).

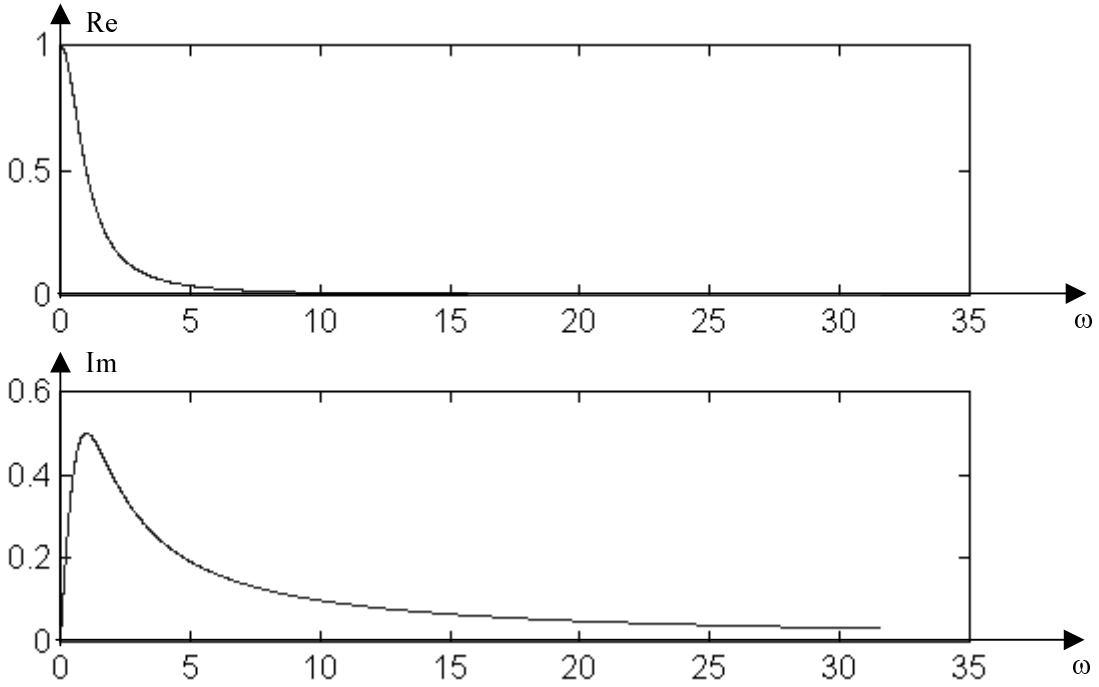

Figura 5: *Re{ G(jω) }* e *Im{ G(jω) }* em função de *ω*.

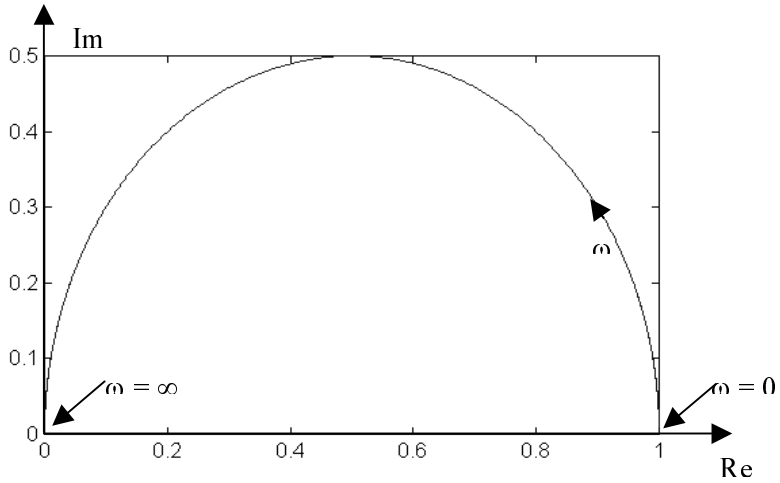

Figura 6: *Im{G(jω) }* em função de *Re{ G(jω) }*.

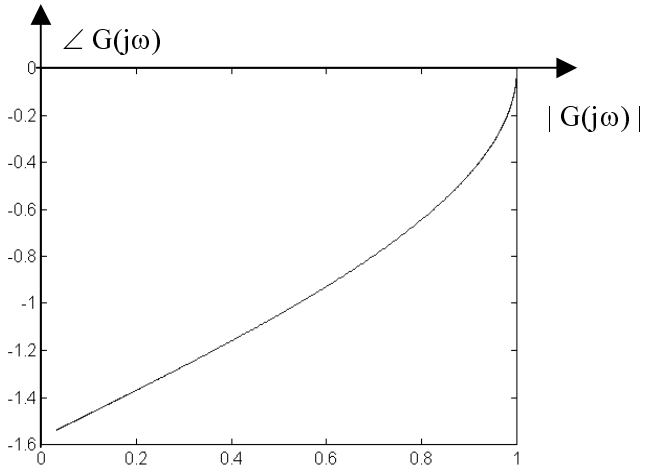

Figura 7: *∠G(jω)* em função de | *G(jω)* |

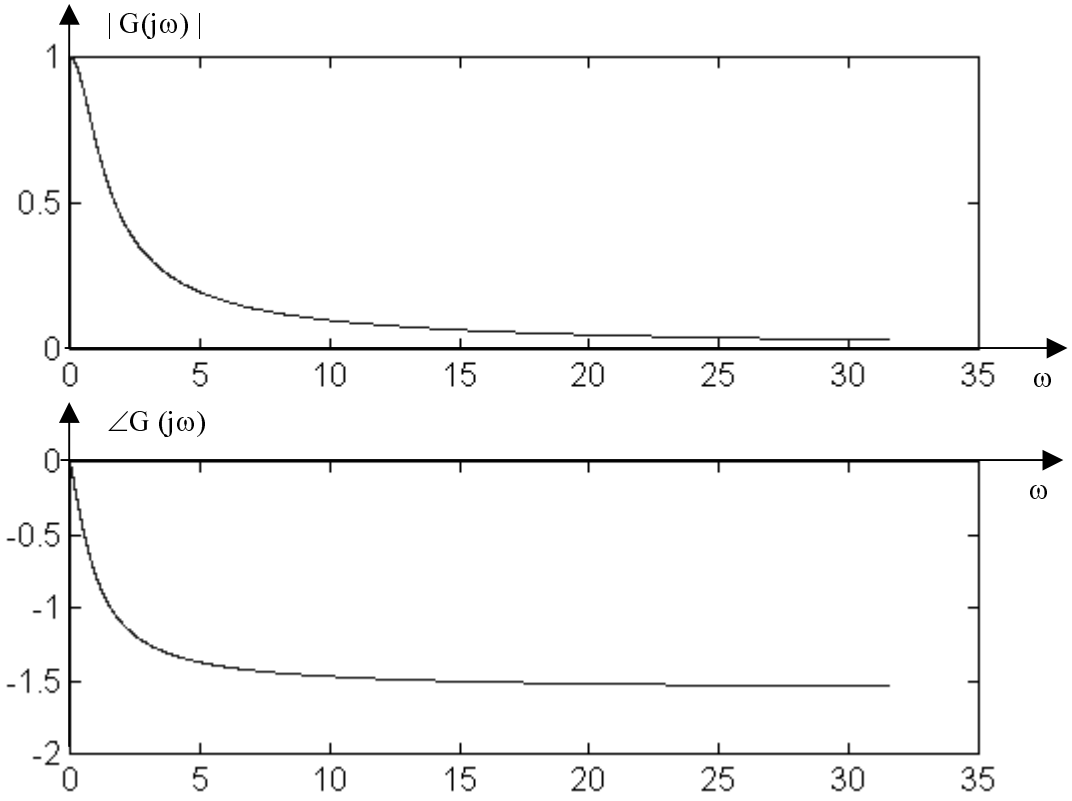

Figura 8: $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$ em função de ω.

3.1 DIAGRAMAS DE BODE

Das várias representações mencionadas anteriormente para $G(j\omega)$ apenas nos interessará a correspondente à equação 14. Mais concretamente, referimo-nos aos *diagramas de Bode* que são constituídos pelos diagramas de amplitude (onde se representa não o módulo de $G(j\omega)$ mas antes $20\ log_{10}\ |G(j\omega)|$ em função do $log_{10}\ \omega$) e de fase (representando o argumento da função de resposta em frequência, $\angle$G(jω) em função de $log_{10}\ \omega$).

Considerando, como anteriormente, $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$, teremos agora, para o módulo de $G(j\omega)$ (diagrama de Bode de amplitude),

$$Eq.15:\ |G(j\omega)|_{dB} = 20\ log_{10}\ |G(j\omega)| = 20\ log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = -10\ log_{10}(1+\omega^2)$$

e para o argumento de $G(j\omega)$ (diagrama de Bode de fase):

$$Eq.16:\ \angle G(j\omega) = -\ arc\ tg(\omega)$$

Na figura 9 representam-se os diagramas de Bode de amplitude e de fase, respectivamente.

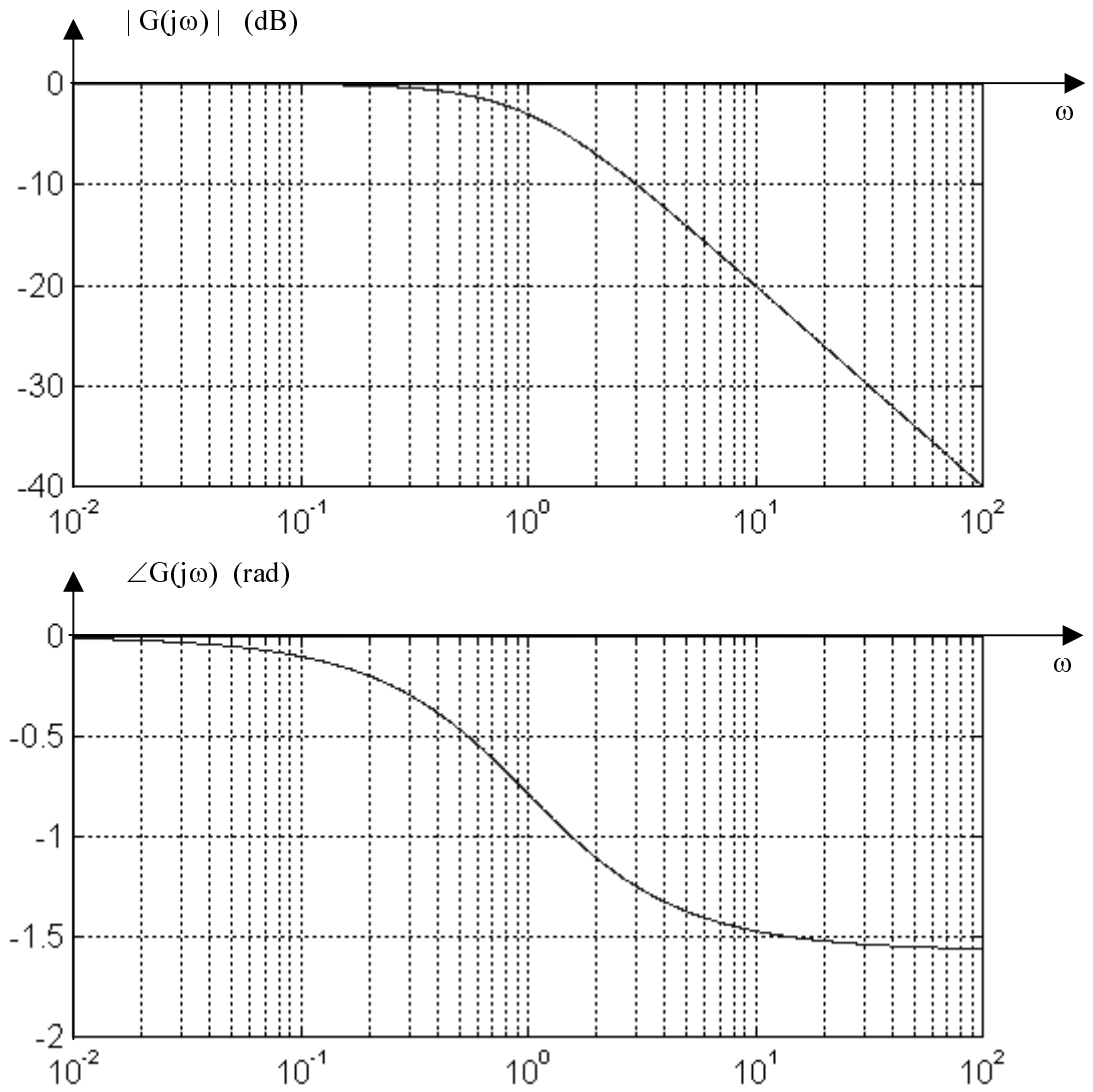

Figura 9: Diagramas de Bode de Amplitude ou de Ganho (em cima) e de Fase (em baixo) correspondentes a $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$.

3.1.1 DIAGRAMAS DE BODE ASSIMPTÓTICOS

Faça-se na equação 14 $\omega << 1$ (baixas frequências) e, como se verifica, teremos $|G(j\omega)|_{dB} = 0$. Podemos, assim, dizer que, nas baixas frequências, o ganho deste circuito é de 1 ou de 0dB, isto é, a amplitude da saída é igual à de entrada.

Fazendo, agora, $\omega >> 1$ (altas frequências), então, $|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10}(\omega)$. Repare-se que, nos diagramas de Bode, o eixo das abcissas não apresenta uma escala linear mas sim logarítmica. Por este facto, nas altas frequências, a resposta do circuito (em dB) varia linearmente com $\log_{10} \omega$.

Determinemos para uma variação de frequência de 1 para 10 (1 década), qual a correspondente variação no ganho. Seja, então $\omega_1 >> 1$ uma dada frequência e $|G(j\omega_1)|_{dB}$ o ganho respectivo do circuito (em dB) a essa frequência. Sendo agora ω_2 uma outra frequência que verifique $\omega_2 = 10\ \omega_1$ (uma década) teremos que o ganho a esta frequência será agora: $|G(j\omega_2)|_{dB} = -20\ log_{10}\ \omega_2 = -20\ log_{10}\ 10\ \omega_1 = -20 - |G(j\omega_1)_{dB}|$. Ou seja, nas altas frequências, teremos uma recta com uma inclinação de -20dB/década (figura 10).

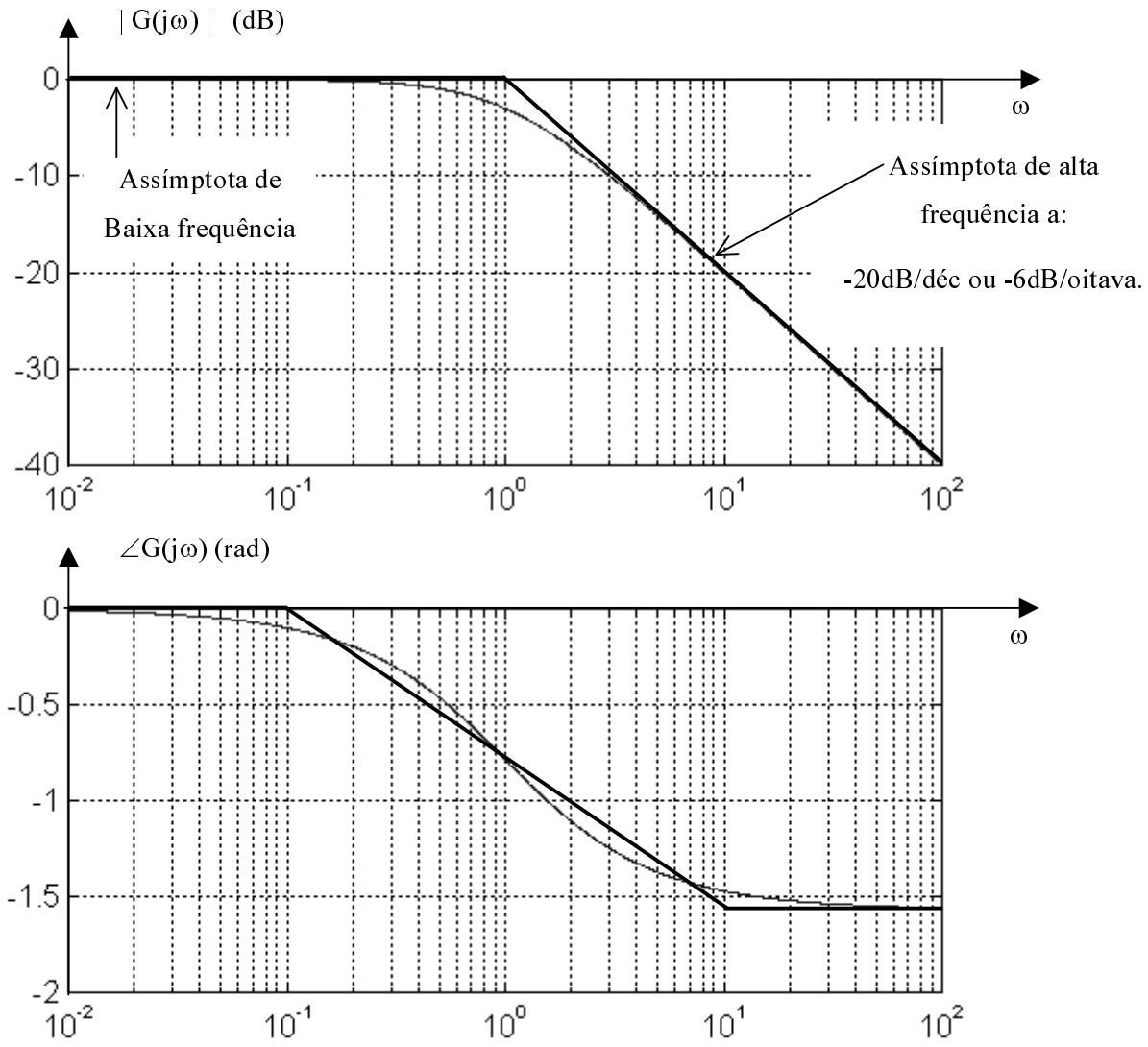

Figura 10: Diagramas de Bode de amplitude e de fase e respectivas aproximações.

Se, em vez de uma variação de uma década na frequência, tivéssemos uma variação de uma oitava, ou seja se $\omega_3 = 2\ \omega_1$, teremos que o ganho a esta frequência será agora

$| G(j\omega_3 |_{dB} = -20\ log_{10}\ \omega_3 = -20\ log_{10}\ 2\ \omega_1 = -6 - | G(j\omega_1)_{dB} |$, ou seja, um declive de -6 dB/oitava é igual a -20dB/década.

Repare-se que as assímptotas se interseptam para $\omega = 1 = \omega_o$ e ainda que o ganho do circuito a esta frequência é $| G(j\omega = 1) |_{dB} = -20\ log_{10} \sqrt{2} = -3\ dB$. Por este facto denomina-se ω_o de frequência de corte. De notar ainda que, a esta frequência, a desfasagem é de $\frac{\pi}{4}$ radianos.

O diagrama de fase pode, por sua vez, ser simplificado, aproximando a função *arc tg* por 3 segmentos de recta como se indica na figura 10.

Na figura 11 apresentam-se os módulos dos erros cometidos no uso das aproximações apresentadas face aos respectivos diagramas de ganho e de fase. Como se pode observar, o erro máximo cometido é menor ou igual a 3dB no diagrama de amplitude e menor ou igual a 6º no diagrama de fase.

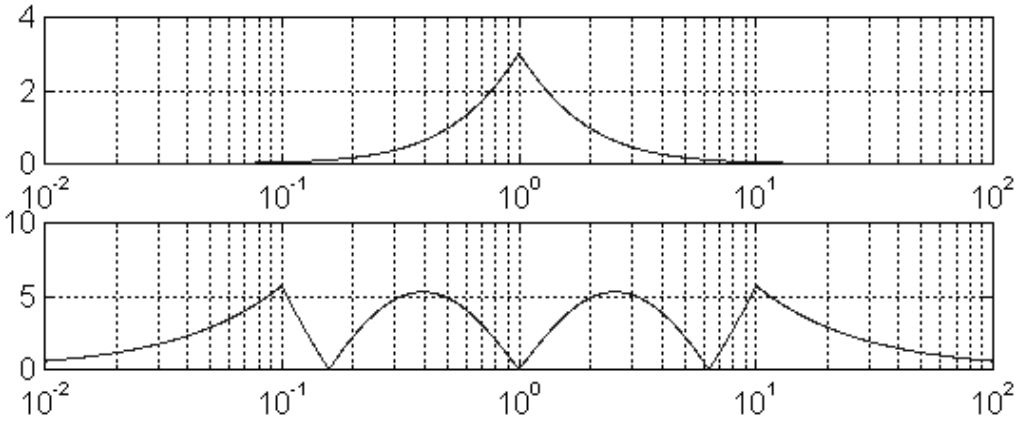

Figura 11: Módulos dos erros resultantes do uso dos diagramas assimptóticos de ganho (em dB) e de fase (em º), respectivamente.

3.2 FACTORES ELEMENTARES

O estudo da resposta em frequência pode ser facilitado se a função de transferência for decomposta num produto de «factores elementares». Concretamente, trata-se de identificar, nos polinómios numerador e denominador da função de transferência $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ factores constantes, de primeira e de segunda ordem. A razão deste procedimento baseia-se no facto de, relativamente, aos diagramas de Bode de amplitude, se usarem logaritmos do módulo do ganho, o que se traduz

consequentemente numa soma de termos. Claro que esta inspecção dos factores ditos elementares pressupõe que, por um lado, a função de transferência é uma função racional e que são conhecidas as raízes dos polinómios numerador e denominador.

Por exemplo, seja $G(s) = \frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$. Como se pode verificar, esta função de transferência apresenta os seguintes zeros e pólos:

- 1 zero em $s = -1$
- 2 pólos em $s = -10$ e $s = -100$

e que se indicam no diagrama de pólos-zeros da figura 12:

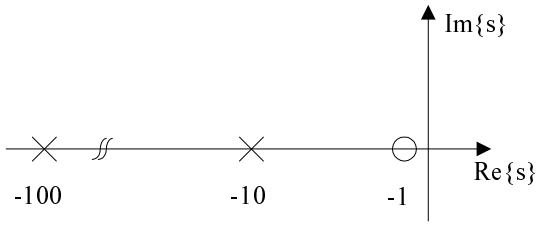

Figura 12: Diagrama de pólos-zeros de G(s), assinalando-se os pólos com ω e os zeros com O.

e a que corresponde uma função de resposta em frequência

$$Eq.17:\quad G(j\omega) = \frac{1}{1000}\frac{1+j\omega}{(1+j\frac{\omega}{10})(1+j\frac{\omega}{100})} = \frac{1}{1000}\frac{1+j\omega}{(1+j\,\omega\,\tau_1)(1+j\omega\,\tau_2)} \quad [5]$$

Calculemos agora $|G(j\omega)|_{dB}$:

$$Eq.18:\quad |G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(0{,}001) + 20\log_{10}|1+j\omega| - \left[20\log_{10}|1+j\frac{\omega}{10}| + 20\log_{10}|1+j\frac{\omega}{100}|\right]$$

Como se verifica na equação 17, o diagrama de Bode de amplitude será obtido pela soma de quatro parcelas ou factores elementares, nomeadamente:

- um factor de ganho, $20\log_{10}(0{,}001)$ e

[5] Este modo de apresentar a função de resposta em frequência e que pode ser, também, adoptada à função de transferência é denominada forma das constantes de tempo. De facto, os termos que, no denominador, multiplicam a pulsação ω são $\frac{1}{10} = \tau_1$ e $\frac{1}{100} = \tau_2$ e, como, facilmente se depreende, têm de dimensão o segundo (constante de tempo).

- três factores de primeira ordem, na forma $20\ log_{10} \mid 1 + j\frac{\omega}{\alpha} \mid$:

  - factor «passa-alto» $20\ log_{10} \mid 1 + j\frac{\omega}{\alpha} \mid$ com $\alpha = 1$, e

  - factores «passa-baixo» $20\ log_{10} \mid 1 + j\frac{\omega}{\alpha} \mid$ com $\alpha = \frac{1}{\tau} = 10$ e $\alpha = 100$, respectivamente.

Quanto ao diagrama de Bode de fase, ou seja de $\angle G(j\omega)$, será naturalmente obtido pela soma de quatro parcelas, equação 18:

$$Eq.19:\ \angle(0{,}001) + \angle(1 + j\,\omega) - \left[\angle(1 + j\frac{\omega}{10}) + \angle(1 + j\frac{\omega}{100})\right]$$

Basicamente, trata-se de identificar os zeros e os pólos da função de transferência e, factorizar os polinómios numerador e denominador em função de factores ganho, passa-alto 1ª ordem, etc.

3.2.1 FACTOR DE GANHO G(S) = K

O factor de ganho $G(s) = K$ ou $G(j\omega) = K$ corresponde a uma função constante na frequência, pelo que o diagrama de Bode de amplitude será constiutído por uma recta horizontal de ordenada $20\ log_{10}\ |K| = |K|_{dB}$.

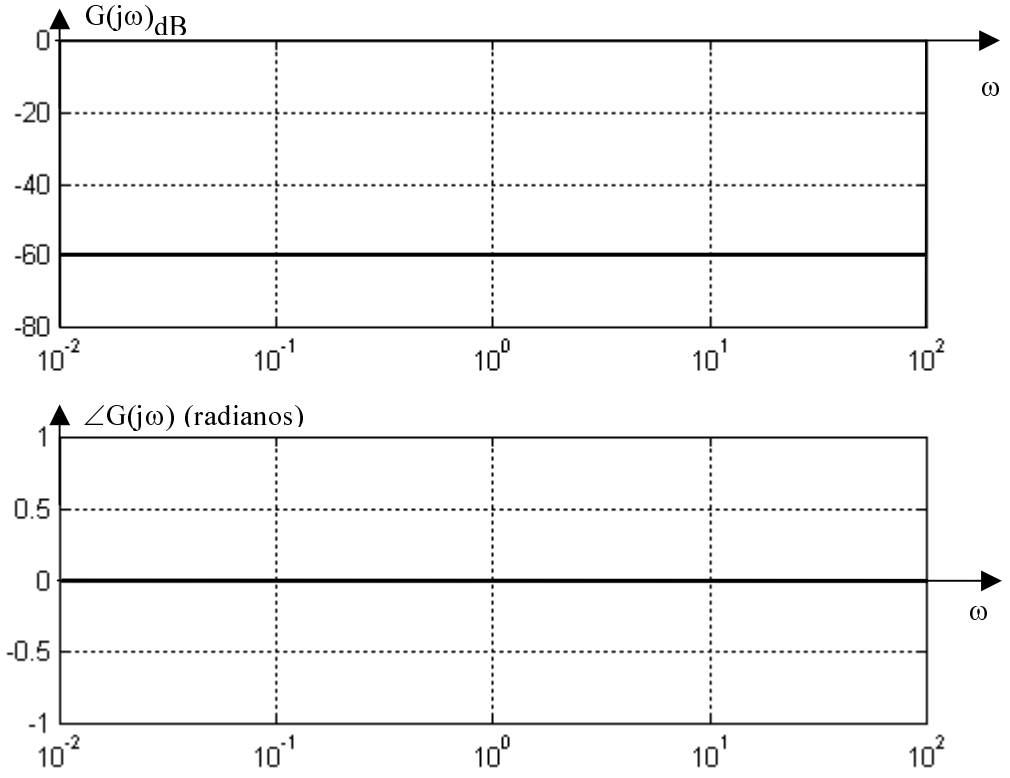

Figura 13: Diagramas de Bode de amplitude e de fase para $G(s) = K = 0{,}001$.

Quanto ao diagrama de Bode de fase, teremos uma recta horizontal em *0* (zero) ou em $\pm \pi$ radianos consoante, respectivamente, *K* for positivo ou negativo: $\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & K > 0 \\ \pm\pi & K < 0 \end{cases}$. Na figura 13 representa-se um exemplo em que $K = 0{,}001$ ou seja, $K_{dB} = -60dB$.

3.2.2 FACTOR INTEGRATIVO G(S) = $\frac{1}{s}$

O factor integrativo deve o seu nome ao facto de a função de transferência corresponder a uma saída que, no domínio do tempo, não é mais do que o integral da entrada. Concretamente, se tivermos para a relação entrada-saída, $v_o(t) = \int_{-\infty}^{t} v_s(\tau)\, d\tau$ e, sendo $v_s(t) = V_s\ e^{s\,t}$, torna-se fácil de verificar que a correspondente função de transferência é $G(s) = \frac{1}{s}$, que apresenta um único pólo para $s = 0$. Sendo a função de resposta em frequência $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$, obteremos

Eq.20: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{|j\omega|} = -20 \log |\omega|$

Eq.21: $\angle G(j\omega) = arg \frac{1}{j\omega} = arctg \frac{-1}{0} = -\frac{\pi}{2}$

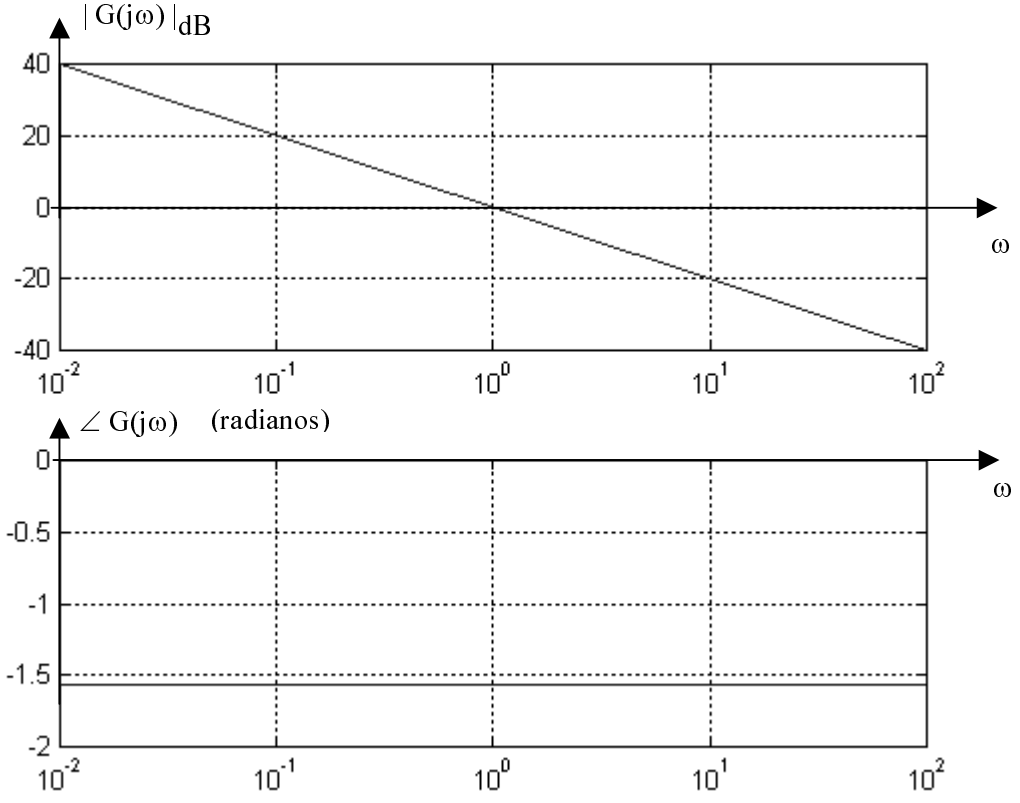

Figura 14: Diagramas de Bode de amplitude e de fase para $G(s) = \frac{1}{j\omega}$.

3.2.3 PASSA-BAIXO DE 1ª ORDEM $G(s) = \frac{a}{s + a}$

A função de transferência $G(s) = \frac{1}{s + 1}$ é obtida a partir de $G(s) = \frac{a}{s + a} = \frac{1}{\frac{s}{a} + 1}$, fazendo $a = 1$. Ou seja, mantendo o ganho estático[6] unitário e colocando o pólo em $s = -a = -1$. Teremos então, para o módulo de $G(j\omega)$ e para o argumento de $G(j\omega)$ os resultados já obtidos nas equações 15 e 16. Por questões de facilidade de exposição, na figura 15 repetem-se os diagramas de Bode de amplitude e de fase apresentados na figura 9.

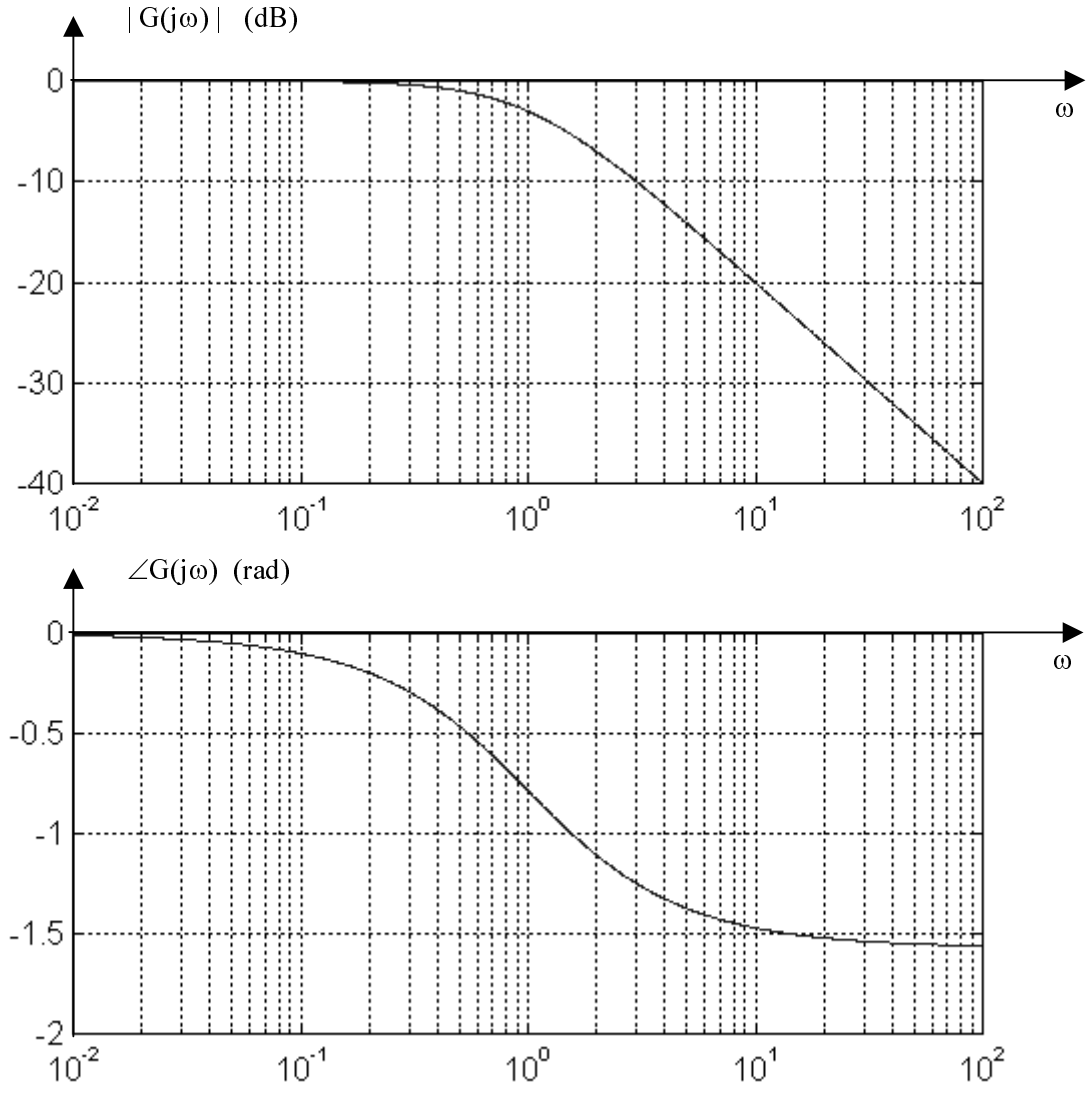

Figura 15: Diagramas de Bode de Amplitude e de Fase correspondentes para $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$.

[6] O ganho estático não é mais do que o módulo da função de resposta em frequência para ω = 0, | G(0) |.

O estudo assimptótico dos diagramas de Bode já foi efectuado (secção 3.1.1) pelo que não será aqui repetido. Recordando a figura 10, poderemos ver que a assímptota de baixa-frequência não é mais do que um factor de ganho unitário e que a assímptota de alta-frequência corresponde, efectivamente, ao factor integrativo!

Resumindo, um circuito passa-baixo de 1ª ordem tem um comportamento nas baixas frequências semelhante ao simples factor de ganho (neste caso, unitário), ao passo que nas altas frequências se comporta como um circuito «integrador» cuja saída[7] diminui (em amplitude) com $\frac{1}{\omega}$ e se encontra atrasada de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Importa ainda referir que na eventualidade de $a \neq 1$, basta «deslocar» os diagramas da figura 15 na horizontal de $\omega = 1$ para $\omega = a$.

3.2.4 FACTOR DERIVATIVO G(S) = S

O factor derivativo deve o seu nome ao facto desta função de transferência corresponder a um circuito cuja tensão de saída não é mais do que a derivada da tensão de entrada: $v_o(t) = \frac{d}{dt} v_s(t)$.

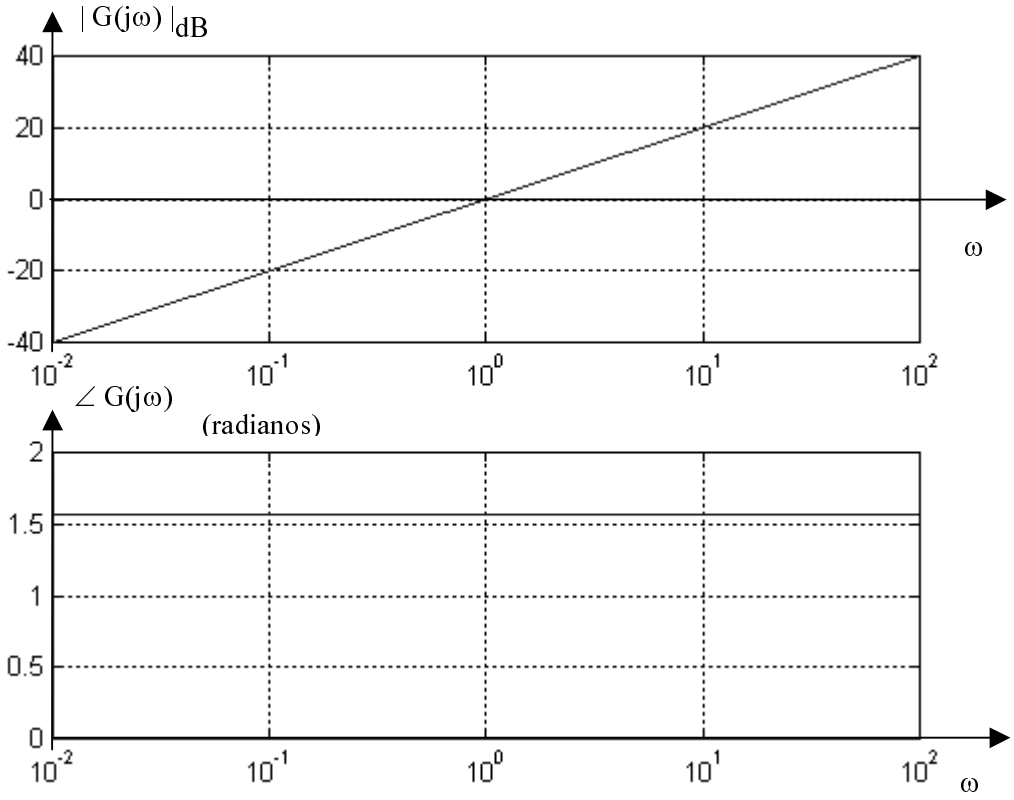

Figura 16: Diagramas de Bode de Amplitude e de Fase correspondentes para $G(j\omega) = j\omega$.

[7] Para uma tensão de entrada sinusoidal.

Sendo $v_S(t) = V_S\ e^{s\,t}$, teremos que $v_o(t) = V_o\ e^{st} = \frac{d}{dt} V_S\ e^{st} = s\ V_S\ e^{st}$ e, portanto, a função de transferência é $G(s) = s$. Esta função apresenta um zero em $s = 0$. A correspondente função de resposta em frequência é $G(j\omega) = j\omega$ da qual se obtém:

Eq.22: $|G(j\omega)|_{dB} = 20\ log\ |j\omega| = 20\ log\ |\omega|$

Eq.23: $\angle G(j\omega) = arg\ (j\omega) = arctg\ \frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$

Como se pode observar na figura 16, o diagrama de Bode de amplitude é uma recta de inclinação igual a +20dB/década (+6dB/oitava) ao passo que o diagrama de Bode de fase é uma recta horizontal de ordenada $\frac{\pi}{2}$.

3.2.5 PASSA-ALTO DE 1ª ORDEM G(S) = S + 1

A função de transferência $G(s) = s + 1$ é obtida a partir de $G(s) = \frac{s + a}{a} = \frac{s}{a} + 1$, fazendo $a = 1$, ou seja, colocando o zero em $s = -a = -1$.

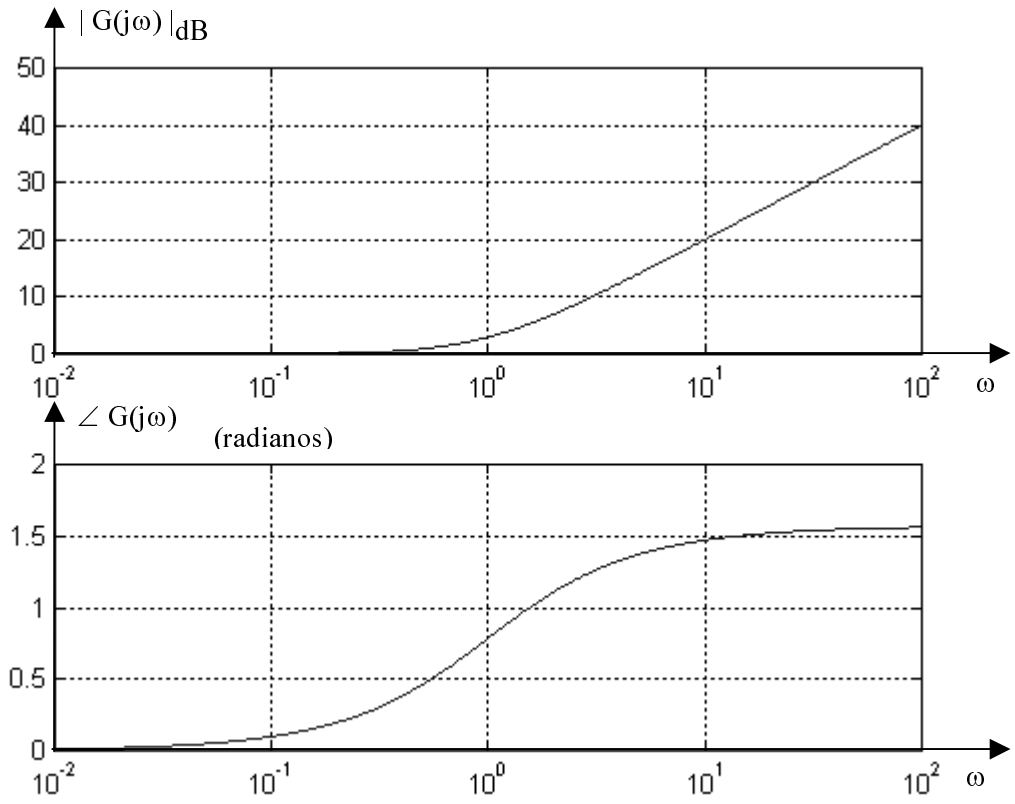

Figura 17: Diagramas de Bode de Amplitude e de Fase correspondentes para $G(j\omega) = j\omega + 1$.

Os diagramas de Bode de amplitude e de fase foram obtidos, respectivamente, a partir das equações 24 e 25.

Eq.24: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |j\omega + 1| = 20 \log \sqrt{\omega^2 + 1}$

Eq.25: $\angle G(j\omega) = \arg(j\omega) = \text{arctg}(\omega)$

Sendo a função de transferência do passa-alto de 1ª ordem o inverso da função de transferência do passa-baixo de 1ª ordem, imediatamente se verifica que os diagramas de Bode são simétricos (simetria no eixo das abcissas) em relação aos da secção 3.2.3. Sem necessidade de efectuar pormenorizadamente a determinação das assímptotas para $|j\omega + 1|_{dB}$, poderemos (atendendo à propriedade anterior) verificar o seguinte:

- assímptota de baixa-frequência: recta horizontal, ordenada 0dB;
- assímptota de alta-frequência: recta de inclimação + 20dB/década ou + 6dB/oitava;
- frequência de cruzamento das assímptotas: $\omega = 1$ (frequência do zero da função de transferência)

3.2.6 PASSA-BAIXO DE 2ª ORDEM $G(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$

Como é sabido, os pólos de $G(s)$ não são mais do que as raízes do polinómio denominador: $s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$, ou seja,

Eq.26: $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$

Da equação 26 se verifica de imediato que o coeficiente ξ (denominado coeficiente de amortecimento) desempenha um papel fundamental na localização dos pólos de $G(s)$. Assim:

- $\xi > 1$ pólos reais distintos
- $\xi = 1$ pólo real duplo
- $\xi < 1$ pólos complexos conjugados

Na figura 18 apresenta-se o lugar geométrico dos pólos de G(s) em função do coeficiente ξ.

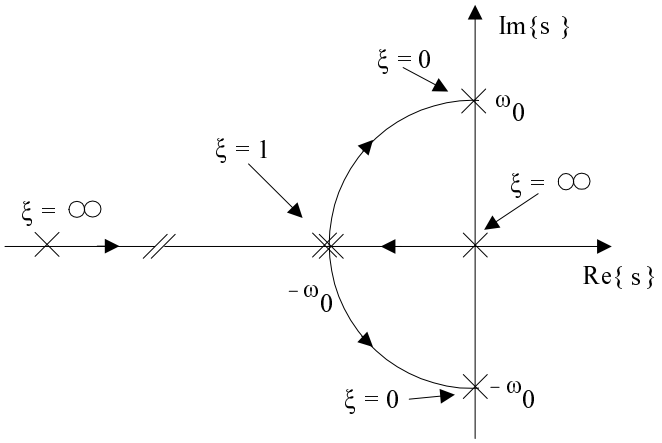

Figura 18: Pólos de $G(s)$ em função do coeficiente ξ.

No caso de G(s) apresentar pólos reais, os correspondentes diagramas de Bode poderão ser obtidos pela composição de duas funções de transferência:

- $\xi > 1$ $\qquad G(s) = \frac{s_1}{s - s_1} \cdot \frac{s_2}{s - s_2}$
- $\xi = 1$ $\qquad G(s) = \left(\frac{s_1}{s - s_1}\right)^2$

Concretizemos para alguns exemplos; assim, na figura 19 apresentam-se os diagramas de Bode de amplitude e de fase para $\xi = 5{,}05$ e $\omega_0 = 1$, correspondendo a $s_1 = -10$ e $s_2 = -0{,}1$. Na figura 19 apresentam-se os diagramas de Bode assinalando-se ainda as assímptotas da baixa e alta frequências. Note-se que, neste caso, só para frequências superiores ao 1º pólo ($\omega > 10$) se obtém uma boa aproximação à curva real.

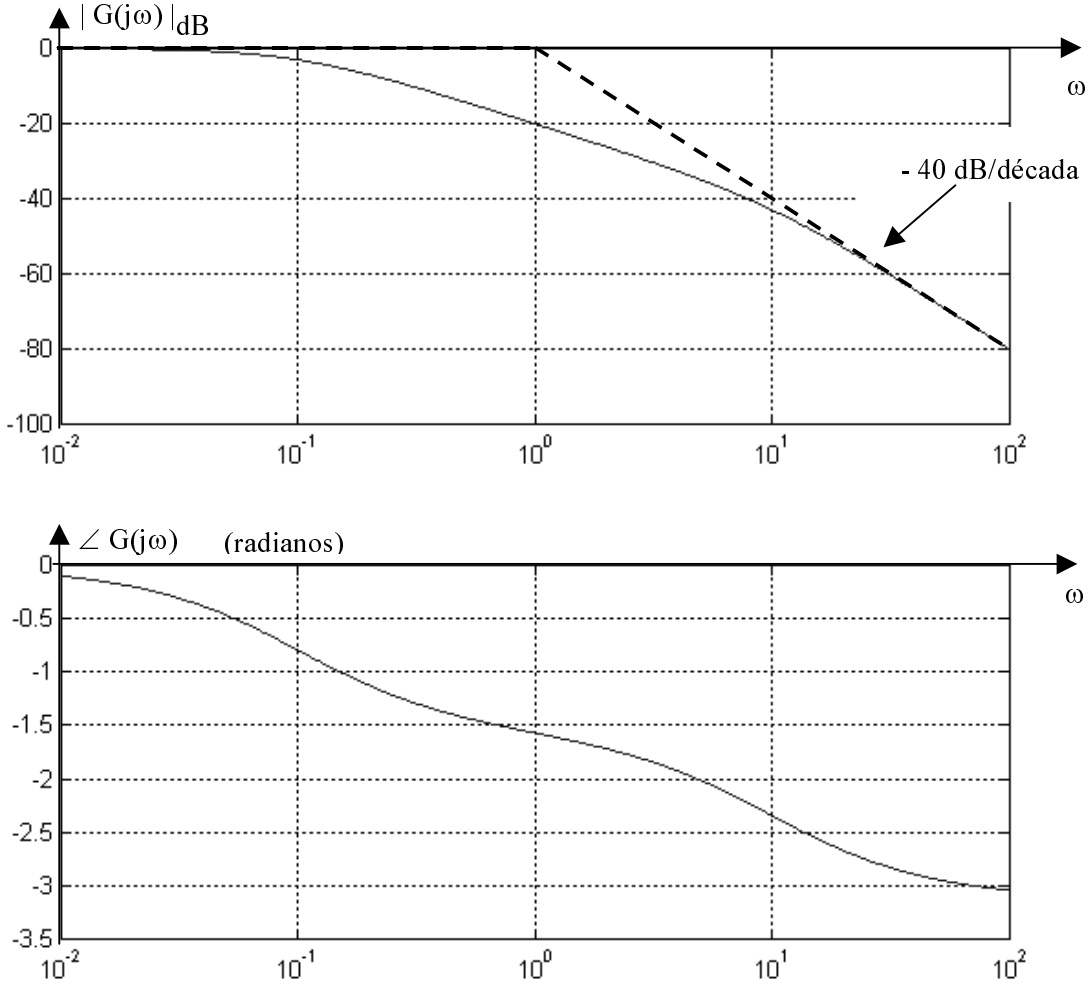

Figura 19: Diagramas de Bode de amplitude (em cima) e de fase (em baixo) de

$$G(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2}$$, para $\xi = 5$ e $\omega_0 = 1$.

Na figura 20 apresentam-se os diagramas de Bode de amplitude para as funções de transferência $G_1(s) = \dfrac{1}{\frac{s}{10} + 1}$ e $G_2(s) = \dfrac{1}{\frac{s}{0,1} + 1}$, sendo $G(s) = G_1(s) \, . \, G_2(s)$.

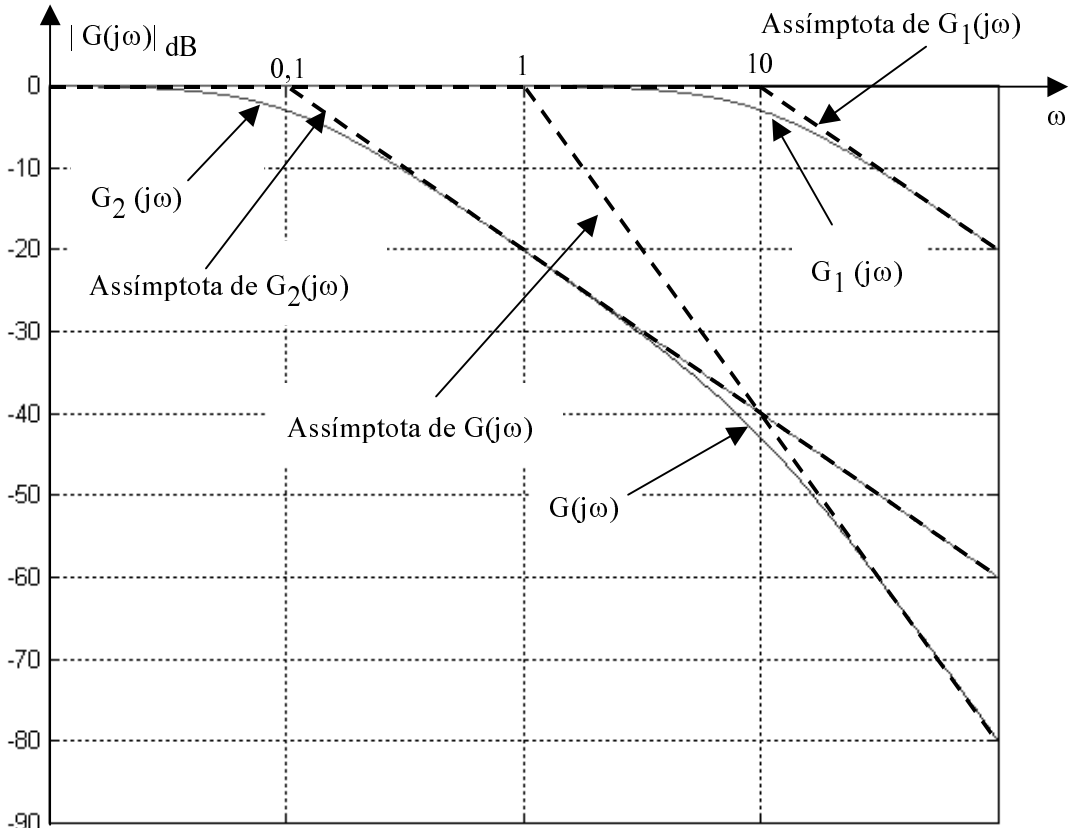

Figura 20: Diagrama de Bode de amplitude de $G(s) = \dfrac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2}$, para $\xi = 5$ e $\omega_0 = 1$

Resumindo,

- Começando pela representação de $| G_1(j\omega) |_{dB}$ que, como já se sabe, apresenta duas assímptotas que se cruzam na frequência do pólo, ω = 10 rad s^{-1} , a saber:
  - na baixa-frequência, uma recta horizontal a 0dB;
  - na alta-frequência, uma recta de inclinação - 20bD/década
- Representando $| G_2(j\omega) |_{dB}$, em tudo idêntica a $| G_1(j\omega) |_{dB}$, mas localizando o pólo em $\omega = 0,1$ rad s^{-1} .
- Adicionando, ponto-a-ponto, os diagramas de $| G_1(j\omega) |_{dB}$ e de $| G_2(j\omega) |_{dB}$.

Assim, para $\omega \ll 0{,}1$, $|\,G(j\omega)\,|_{dB}$ pode ser «aproximado» por uma recta horizontal a 0dB. Para $0{,}1 < \omega < 10$, $|\,G(j\omega)\,|_{dB}$ pode ser aproximado por uma recta de assímptota -20dB/década; ou seja, para $\omega < 10$, tudo se passa como se a função de transferência fosse de 1ª ordem passa-baixo. Contudo, para $\omega > 10$, há a considerar a dupla contribuição de dois factores de 1ª ordem do tipo passa-baixo; portanto a assímptota de alta-frequência tem um declive de -40dB/década.

À medida que os pólos s_1 e s_2 se aproximam, ou seja, quando $\xi \to 1$, tanto menor é a gama de frequências para as quais $|\,G(j\omega)\,|_{dB}$ pode ser aproximada pela recta a -20 dB/década. Efectivamente, quando $s_1 = s_2$ ($\xi = 1$), $|\,G(j\omega)\,|_{dB}$ apenas apresenta uma assímptota horizontal a 0dB e uma assímptota de alta-frequência a -40dB/década, como se pode observar na figura 21.

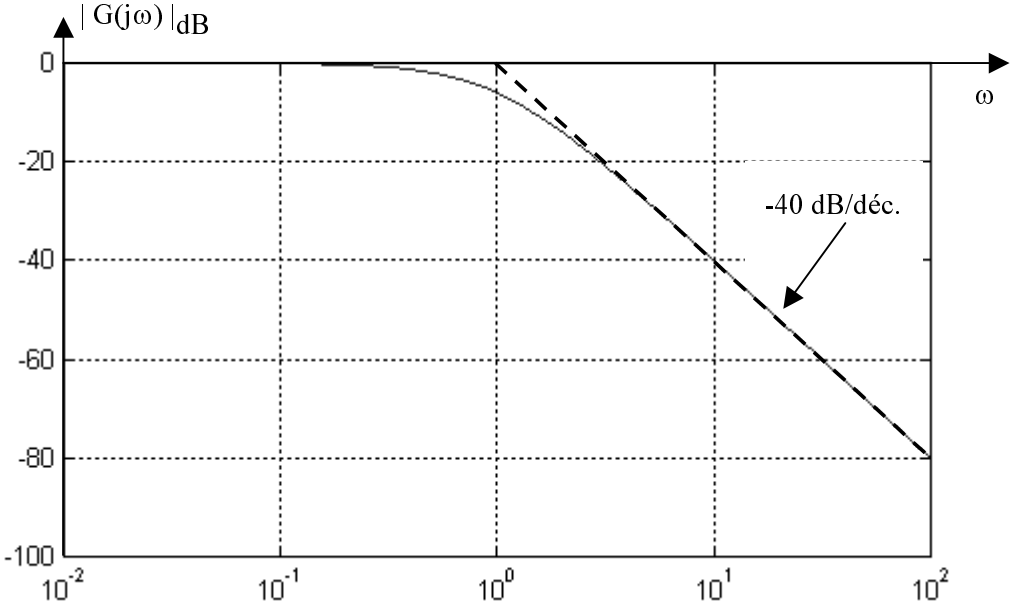

Figura 21: Diagrama de Bode de amplitude para $G(s) = \dfrac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2}$, para $\xi = 1$ e $\omega_0 = 1$

Verifica-se que, para $\xi = 1$, $|\,G(j\omega)\,|_{dB}$ = -6dB quando $\omega = 1$, ou seja, há um erro de 6dB entre a curva assimptótica e a função de resposta em frequência. Pode-se ainda verificar que este erro de 6dB é o erro máximo que se obtém ao aproximar $|\,G(j\omega)\,|_{dB}$ pelas curvas assimptóticas para qualquer frequência. No caso anterior, em que o coeficiente de amortecimento era superior à unidade ($\xi > 1$), já o erro entre a função de resposta em frequência e a respectiva aproximação assimptótica seria inferior a 3dB para pólos s_1 e s_2 afastados mais do que uma década.

No caso em que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1$, o erro entre $|\,G(j\omega)\,|_{dB}$ e a aproximação assimptótica é, para qualquer frequência, inferior a -6dB e maior do que -3dB. Se $\xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, o diagrama de Bode de

$G(j\omega)$, na vizinhança da frequência ω_0 ultrapassa as assímptotas, apresentando uma sobreelevação na resposta em frequência e, consequentemente, quando menor for ξ, maior será esta sobreelevação. Este facto é representado na figura 22.

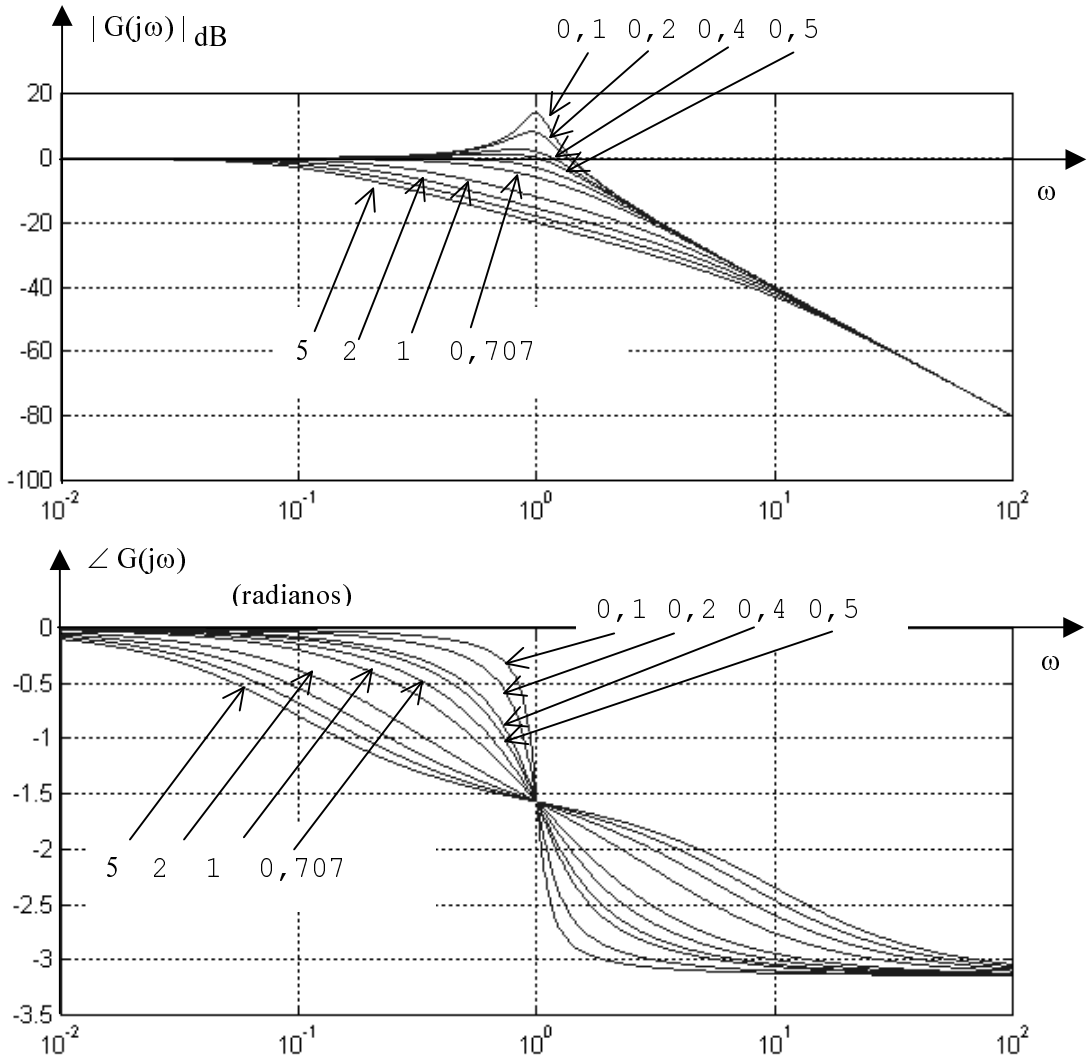

Figura 22: Diagramas de Bode de amplitude e de fase para $G(s) = \dfrac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2}$ em função do coeficiente de amortecimento ξ.

3.3 CASOS DE APLICAÇÃO

3.3.1 1º EXEMPLO: UM ZERO E DOIS PÓLOS, $G(S) = \dfrac{S+1}{(S+10)(S+100)}$

Reescrevendo G(s) na forma das constantes de tempo, teremos:

$$Eq.27: \quad G(s) = \frac{1}{1000} \frac{(s+1)}{(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{100}+1)}$$

a que corresponde uma função de resposta em frequência,

$$Eq.28: \quad G(j\omega) = \frac{1}{1000}(j\omega+1) \frac{1}{\frac{j\omega}{10}+1} \frac{1}{\frac{j\omega}{100}+1}$$

onde, à semelhança do efectuado em 3.2, podemos identificar quatro factores elementares. As contribuições de cada um destes factores para o módulo e para a fase de G(jω) encontram-se na figura 23 e 24, respectivamente.

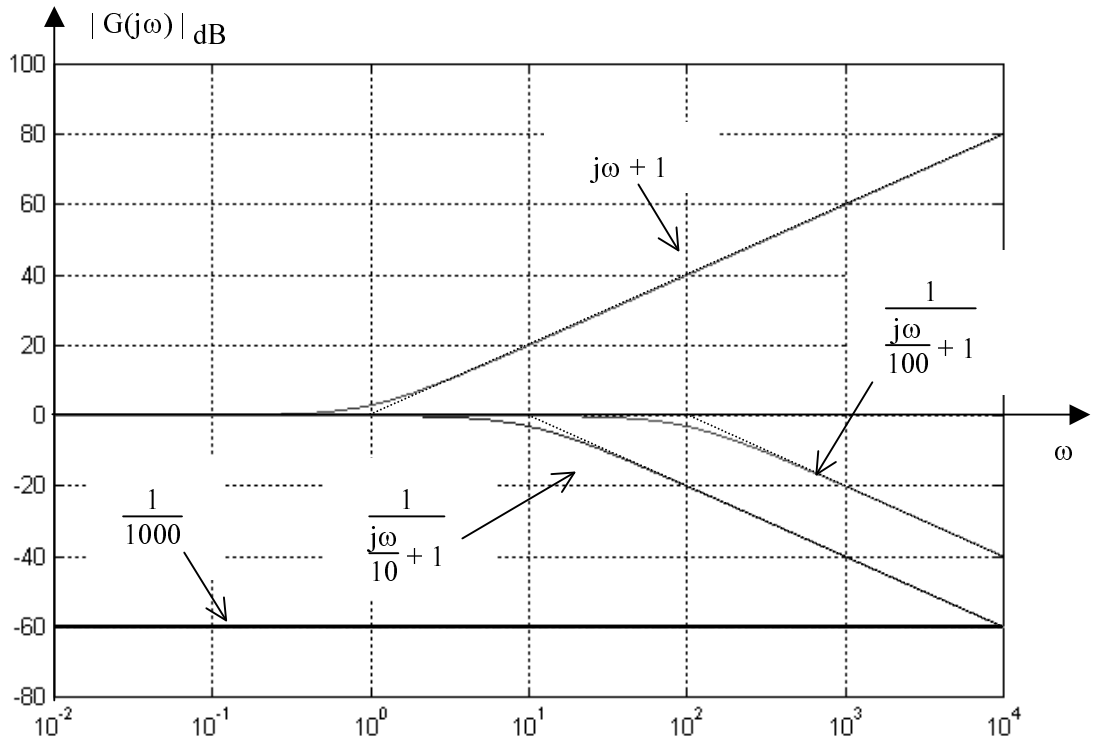

Figura 23: Diagramas de Bode de amplitude (reais e assimptóticos) para os factores elementares de

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+10)(s+100)}.$$

Note-se que os diagramas apresentados são, de facto, muito fáceis de obter. Assim, identificando os factores elementares, não há mais do que «centrar» os diagramas de Bode dos factores elementares nas novas frequências do zero e dos pólos:

- zero em s = -1
- pólo em s = -10
- pólo em s = -100

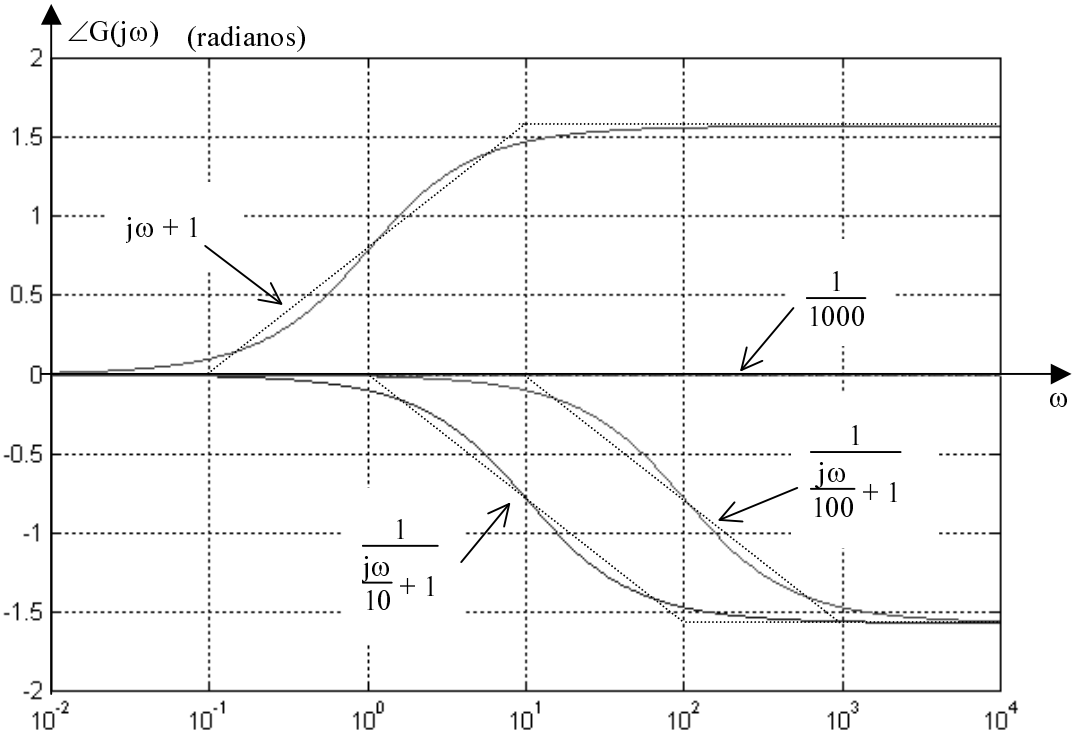

Figura 24: Diagramas de Bode de fase (reais e assimptóticos) para os factores elementares de

$$G(s) = \frac{s + 1}{(s + 10)(s + 100)}.$$

Finalmente, nas figuras 25 e 26 apresentam-se, respectivamente, os diagramas de Bode de amplitude e de fase para G(jω), onde se assinalam ainda os correspondentes diagramas assimptóticos.

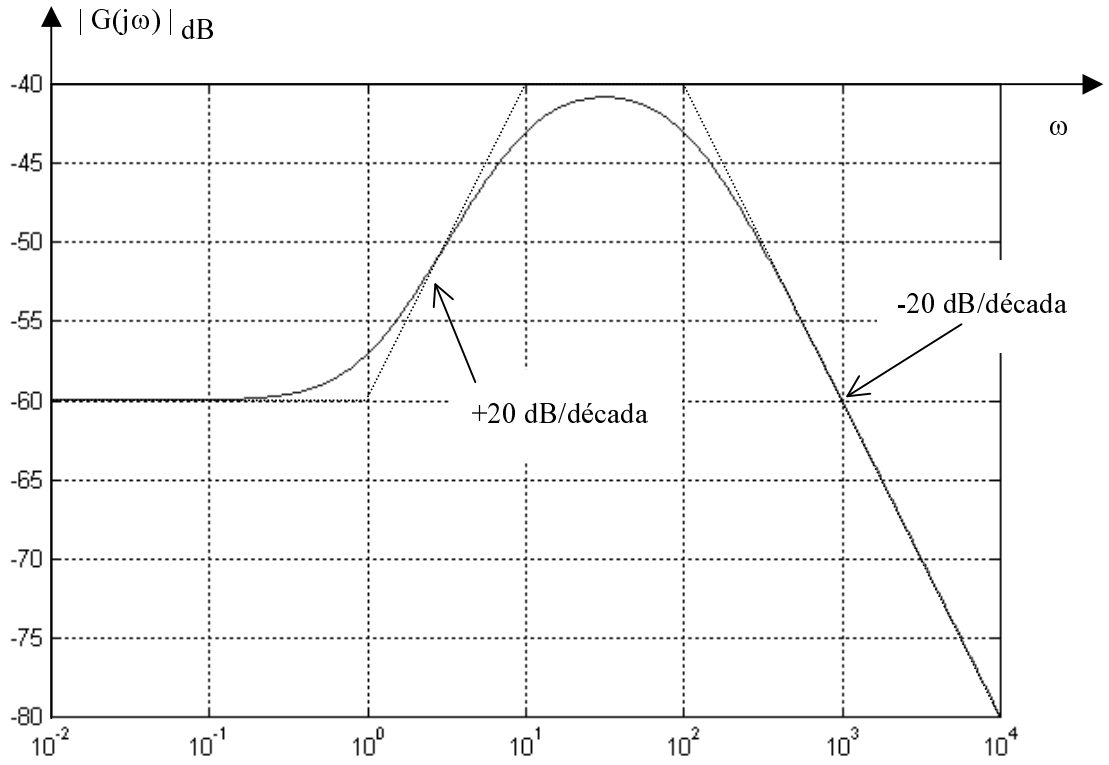

Figura 25: Diagramas de Bode de amplitude (reais e assimptóticos) para $G(s) = \frac{s + 1}{(s + 10)(s + 100)}$.

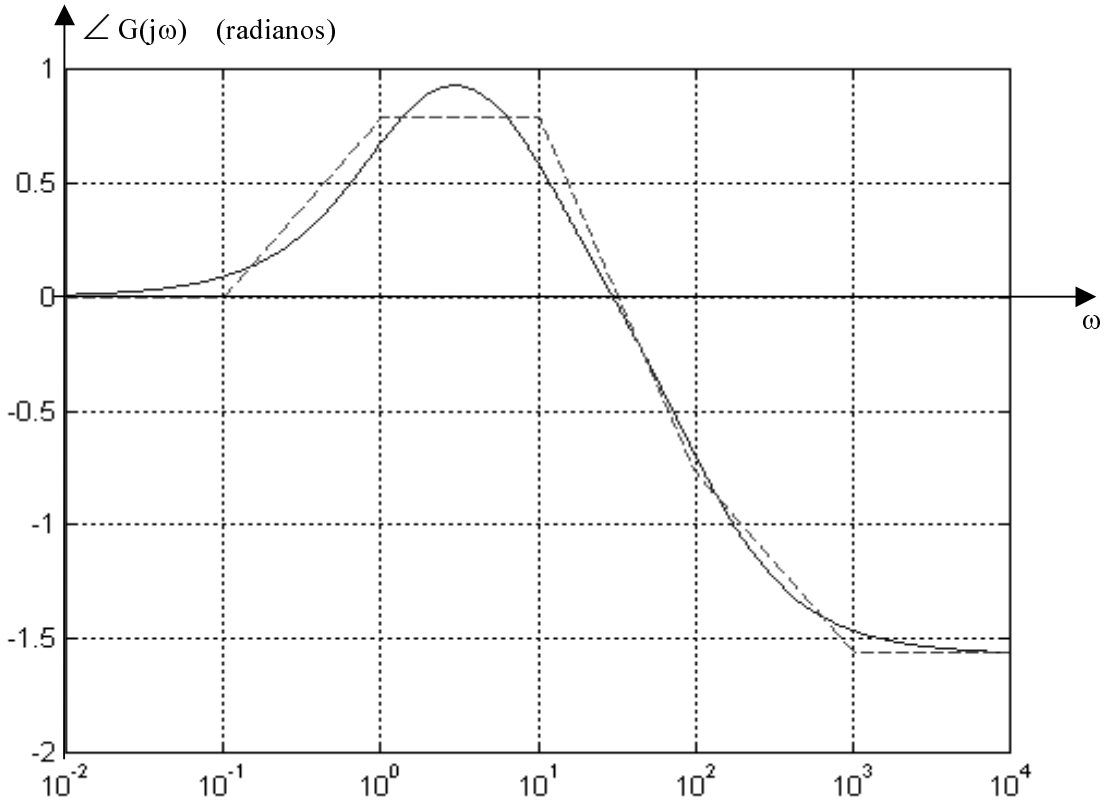

Figura 26: Diagramas de Bode de fase (reais e assimptóticos) para $G(s) = \frac{s + 1}{(s + 10)(s + 100)}$.